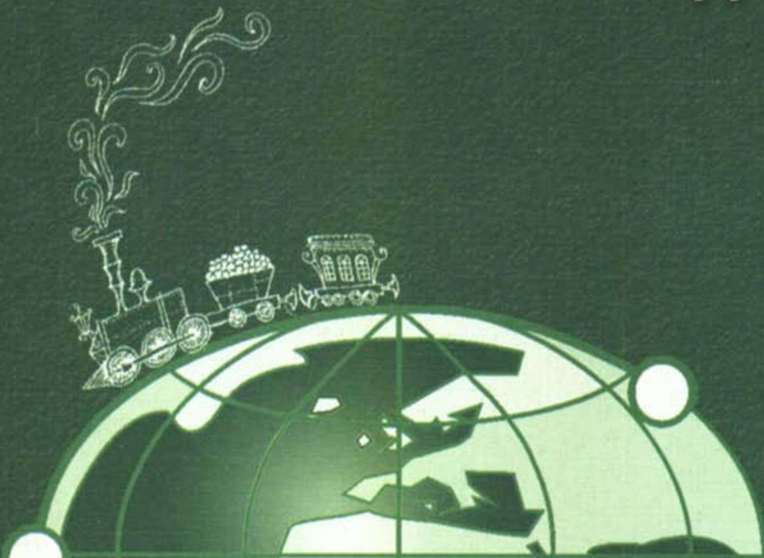
В. А. Успенский

ЧТО ТАКОЕ АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ?



R&C Dynamics

В. А. Успенский

ЧТО ТАКОЕ АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД?

Издание второе, исправленное

R&C Dynamics РХД
Москва • Ижевск

2001

УДК 511

Успенский В. А.

Что такое аксиоматический метод? — Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 96 стр.

Книга объясняет роль аксиоматического подхода в построении математической теории. Подробно рассмотрен современный подход к аксиоматике геометрии, а также к аксиоматике действительных чисел. Изложены аксиомы метрики и аксиомы меры. В книге содержится значительное количество примеров, способствующих лучшему усвоению материала.

Будет полезна школьникам старших классов, студентам и всем, интересующимся основами математики.

ISBN 5-7029-0337-4

http://rcd.ru

Содержание

§ 1. Что такое аксиомы

Аксиоматический метод — это такой способ построения какой-либо математической теории, при котором в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые **аксиомами**, а все остальные положения теории, называемые **теоремами**, доказываются на основе этих аксиом путем **чисто логических рассуждений**. Те выражения из предыдущей фразы, которые были выделены жирным шрифтом, а именно **аксиомы**, **теоремы** и **чисто логические рассуждения**, будут разъяснены далее.

Начнем с аксиом. Возникают естественные вопросы: что такое аксиомы? откуда они взялись? зачем они нужны? Чтобы ответить на них, нам придется выйти за пределы чистой математики и вступить в области, пограничные между математикой и философией.

В естественных науках многие факты обосновываются экспериментально, т. е. посредством проведения эксперимента (*экспериментом* называется научно поставленный опыт). Возьмем, например, такой медицинский факт: анальгин производит обезболивающее и жаропонижающее действие. Это факт обосновывается многочисленными экспериментами: анальгин давали людям, имевшим повышенную температуру или испытывавшим боль, после чего температура у них понижалась, а боль уменьшалась. Или такой ботанический факт: деревья, имеющие хвою, имеют и шишки. Этот факт обосновывается многочисленными наблюдениями над хвойными деревьями. Или растворимость поваренной соли в воде — каждый может убедиться в этом на своем собственном опыте. В физике свойство равноускоренности свободного падения неоднократно проверялось открывшим это свойство Галилеем и его современниками.

Другое дело — теоремы геометрии. Предположим, что мы хотим обосновать тот факт, что у двух треугольников, у которых равны две стороны и угол между ними, равны и третьи стороны. Что мы должны делать? Конечно, мы можем поставить опыт: взять какие-либо два треугольника, удовлетворяющие сформулированному требованию, и убедиться в том, что их третьи стороны действительно равны. Однако может ли этот опыт служить достаточным обоснованием интересующего нас факта? А ну как равенство третьих сторон имеет место только для выбранной нами пары треугольников, а для других пар треугольников оно места не имеет? Будем продолжать наши эксперименты и брать все новые и новые пары треугольников с равными углами, заключенными между попарно равными сторонами. Каждый раз мы будем убеждаться, что и третьи стороны равны. Но ведь мы все равно не сможем перебрать в с е х треугольников, а тогда каждый раз будет оставаться сомнение: а вдруг для еще не рассмотренных нами треугольников равенство третьих сторон не выполняется!

Наши сомнения совершенно законны, и их законность подкрепляется следующим рассуждением. Изменим условия, изначально налагаемые нами на треугольники, и вместо того, чтобы требовать равенства углов, расположенных м е ж д у попарно равными сторонами, будем требовать равенства углов, п р и л е ж а щ и х к соответствующим сторонам. Более точно, рассмотрим такое утверждение: «Пусть у треугольников ABC и $A'B'C'$ сторона AB равна стороне $A'B'$, сторона AC равна стороне $A'C'$ и, кроме того, угол B равен углу B'; тогда сторона BC равна стороне $B'C'$». Это утверждение неверно, и мы приглашаем читателя убедиться в этом самостоятельно, найдя противоречащий пример, т. е. пару треугольников, для которой выполнены все условия сформулированного утверждения (они перечислены после слова «пусть»), но не выполнено его заключение (оно сформулировано после слова «тогда»). Однако легко может случиться, что такой противоречащий пример будет найден не сразу, и у многих испробованных пар треугольников, в которых равны углы, прилежащие к равным сторонам, третьи стороны этих треугольников также окажутся равными. А что если противоречащий пример (хотя он на самом деле существует) вовсе не будет найден? Ведь тогда можно было бы сделать ошибочный вывод, что наше утверждение истинно! Проведенный анализ показывает, что надо быть очень осторожным при применении неполной индукции, т. е. перехода от частных примеров, не исчерпывающих в своей совокупности всех возможных случаев, к утверждениям общего характера.

Здесь у читателя может возникнуть законное недоумение. Ведь упомянутые выше выводы о свойствах анальгина, о наличии шишек у хвойных деревьев, о растворимости соли, о законе свободного падения — все эти выводы сделаны на основе ограниченного числа наблюдений, то есть на основе той самой неполной индукции, которую мы только что вроде бы отвергли. Да, мы ее отвергли — но только как средство для доказательств положений математики. Для естественных наук — таких, как медицина, биология, химия, физика — метод неполной индукции считается вполне приемлемым; более того, им без него не обойтись.

Что же касается математики, то ее истины более незыблемы, чем истины медицины или химии, и в математике неполная индукция не работает.

Вернемся, однако, к теореме о равенстве треугольников по двум сторонам и углу между ними. Что же с нею делать? Перед нами выбор: *или пытаться* доказывать ее, опираясь на ранее доказанные утверждения, или объявить ее *аксиомой*, то есть утверждением, не нуждающимся в доказательстве. Если несколькими строками выше читатель был вправе недоумевать, то теперь он вправе возмутиться. Что значит «объявить аксиомой»? Разве это в нашей власти? Да, в значительной степени в нашей власти, и чуть позже мы попытаемся это объяснить. Если же мы будем доказывать нашу теорему с помощью других, ранее доказанных теорем, а те, другие теоремы, — с помощью третьих и т. д., то ведь все равно этот процесс не может продолжаться бесконечно. Значит, где-то придется остановиться, то есть какие-то предложения уже не доказывать, а принять их за аксиомы.

§ 2. Аксиомы Евклида

Необходимость аксиом была осознана еще древними греками. Самое знаменитое сочинение мировой математики — написанный в III в. до н. э. древнегреческим математиком Евклидом и охватывающий всю современную ему математику трактат «Начала» — начинается так. Сперва идут определения, а сразу вслед за ними — аксиомы. Аксиомы у Евклида разбиты на два списка. Первый список состоит из пяти предложений, второй — из девяти. Лишь аксиомы второго списка названы в русском переводе трактата *аксиомами*, аксиомы же первого списка названы *постулатами*. Говоря о древних текстах, всегда надо точно указывать издание; вот издание, на которое мы здесь ссылаемся: «Начала Евклида». Перевод с греческого Д. Д. Мордухай-Болтовского. Книги I–VI. М.–Л.: Гостехиздат, 1948. Приведем полностью постулаты и аксиомы из этого издания. Слова в квадратных скобках добавлены нами для ясности.

Постулаты

Допустим:

1. Что из всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию.

2. И что ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.

3. И что из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг.

4. И что все прямые углы равны между собой.

5. И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, [в сумме] меньшие двух прямых [углов], то, неограниченно продолженные, эти прямые встретятся с той стороны, где [внутренние] углы [в сумме] меньше двух прямых [углов].

Аксиомы

1. Равные одному и тому же равны между собой.

2. И если к равным прибавляются равные, то и целые [т. е. суммы] будут равны.

3. И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.

4. И если к неравным прибавляются равные, то целые будут не равны.

5. И удвоенные одного и того же равны между собой.

6. И половины одного и того же равны между собой.

7. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.

8. И целое больше части.

9. И две прямые не содержат пространства.

Возникает естественный вопрос, почему одни предложения названы постулатами, а другие — аксиомами. Вопрос этот достаточно сложен. На примере приведенных двух списков можно увидеть некое различие между значениями слов «аксиома» и «постулат» — но различие столь тонкое, что нам, для целей нашего изложения, нет нужды принимать его во внимание; к тому же это различие не всегда ясно прослеживается. В современном языке термины «аксиома» и «постулат» считаются синонимами. Например, **пятый постулат** Евклида часто называют **аксиомой о параллельных**. Мы тоже будем считать термины «аксиома» и «постулат» синонимами, а если и будем называть одни формулировки Евклида постулатами, а другие — аксиомами, то только потому, что у них такое исторически сложившееся название.

Кроме того, надо иметь в виду следующее. Текст евклидовых «Начал», как и подавляющее большинство других древних текстов, не сохранился в виде рукописи, написанной самим автором. До наших дней дошли лишь копии, причем копии, сделанные не с оригинального манускрипта, а с других копий. Изготовление таких копий требовало достаточно высокой, по тем временам, математической квалификации, и этот высокий уровень древних переписчиков и издателей имел свою оборотную сторону: иногда они «улучшали» и дополняли Евклида — в особенности же по части постулатов и аксиом. Поэтому некоторые ученые полагают, что не все те аксиомы и постулаты, которые приводятся в современных изданиях «Начал», действительно присутствовали в исходном тексте Евклида. Некоторые даже считают, что у Евклида вовсе не было аксиом второго списка (они-то и называются в переводах аксиомами), а из пяти аксиом первого списка (постулатов) Евклиду принадлежало лишь первые три. А некоторые публикаторы, оставляя в списке постулатов первые три, оставшиеся два переносят в аксиомы; они же добавляют в аксиомы еще одну: «И если от неравных отнимаются равные, то остатки будут не равны». Всего тогда в списке оказывается 12 аксиом, среди которых аксиома о параллельных — предпоследняя, отчего ее иногда называют *одиннадцатой аксиомой.*

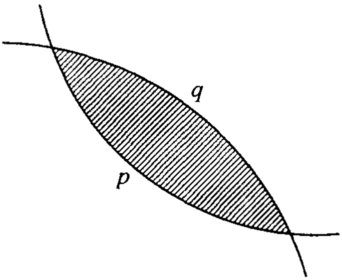


Рис. 1. Девятая аксиома Евклида утверждает невозможность такого взаимного расположения прямых p и q

Мы привели постулаты и аксиомы Евклида по двум причинам. Во-первых, интересно посмотреть, как формулировали свои мысли математики далекого прошлого. Во-вторых, поучительно сравнить формулировки Евклида с теми современными формулировками аксиом геометрии, которые будут приведены ниже.

Но сперва несколько замечаний о евклидовых формулировках.

1. Принято считать, что когда Евклид говорит о равенстве геометрических фигур, он имеет в виду их равновеликость. А девятая аксиома Евклида отражает тот факт, что через две точки может проходить только одна прямая, т.е. что для двух прямых p и q невозможно расположение, показанное на рисунке 1 (если бы такое расположение было возмож-

но, Евклид сказал бы, что прямые p и q «содержат пространство» — а именно то «пространство», которое заштриховано на рисунке).

2. Некоторые из аксиом (например, 8-я) не используются Евклидом в последующем изложении.

3. Напротив, последующее изложение опирается на некоторые положения, не входящие в списки постулатов и аксиом. Так, бросается в глаза, что в эти списки не входят аксиомы стереометрии, хотя теоремы стереометрии в трактате Евклида имеются. Но даже если ограничиться теоремами планиметрии, то выясняется, что в их доказательствах Евклид часто опирается не только на аксиомы, но и на непосредственную геометрическую наглядность. Например, в аксиомах Евклида ничего не говорится о таких важных геометрических понятиях, как ‘располагаться между’, ‘располагаться по одну сторону’ и т. п., хотя использование этих понятий необходимо при доказательстве многих теорем. О важной роли отсутствующих у Евклида аксиом непрерывности будет сказано ниже в § 9.

4. Некоторые формулировки при внимательном анализе оказываются неполными или непонятными. Но, может быть, все дело в том, что мы пока ничего не сказали об определениях Евклида? Может быть, если принять во внимание определения, формулировки станут полными и понятными? Обратимся к определениям.

Как мы отметили ранее, трактат Евклида начинается с определений. Вот некоторые из них.

1. Точка есть то, что не имеет частей.

2. Линия же — длина без ширины.

4. Прямая линия есть та, которая равно расположена к точкам на ней.

5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.

7. Плоская же поверхность есть та, которая равно расположена по отношению к прямым на ней.

С современной точки зрения это все не о п р е д е л е н и я таких понятий, как ‘точка’, ‘линия’, ‘прямая’, ‘поверхность’, ‘плоскость’, а всего лишь п о я с н е н и я этих понятий.

Впрочем, у Евклида встречаются и такие формулировки, которые следует признать определениями и с современной точки зрения. Таково, например, его 10-е определение, в котором определяются понятия ‘прямой угол’ и ‘перпендикуляр’:

10. Когда же прямая, восставленная на другой прямой, образует рядом [смежные] углы, равные между собой, то каждый из [этих] равных углов есть прямой, а восставленная прямая называется перпендикуляром к той, на которой она восставлена.

Меньше всего, однако, мы хотели бы создать впечатление, что Евклид и другие древние авторы заслуживают лишь критики или снисходительного похлопывания по плечу: вот, дескать, какие у них неточные и примитивные формулировки, только в отдельных случаях поднимающиеся до нашего просвещенного уровня! Совсем наоборот, достойно удивления и восхищения то обстоятельство, что более двух тысяч лет назад мыслящие люди ставили перед собою задачу заложить логический фундамент математики (и блестяще решили эту задачу!). Этот факт служит опровержением известного тезиса, что движущей силой развития науки являются исключительно практические потребности: ведь и уровень строгости, и само содержание трактата Евклида далеко превосходило практические потребности того времени. Что же касается формулировок, которые кажутся нам сейчас странными, расплывчатыми, устаревшими, то такими же (или даже худшими) покажутся, надо думать, современные формулировки нашим потомкам — причем не через две тысячи лет, а много раньше, потому что человеческая цивилизация эволюционирует с ускорением.

§ 3. Современный подход к аксиоматизации геометрии: аксиоматика Гильберта

В названии этого параграфа два ученых слова: «аксиоматика» и «аксиоматизация». *Аксиоматика*, или *аксиоматическая система*, — это то же самое, что система аксиом. А *аксиоматизация* какой-либо теории — это процесс создания аксиоматики для этой теории.

Только что мы познакомились с древнейшей аксиоматической системой — системой геометрических аксиом (куда мы включаем и постулаты!) Евклида. Посмотрим теперь, как устроены современные системы аксиом геометрии. Мы сделаем это на примере наиболее известной из таких систем. Она была создана на рубеже XIX и XX веков великим немецким математиком Давидом Ги́льбертом и называется поэтому *системой аксиом Гильберта*. На этом примере мы сможем увидеть и проанализировать многие свойства, характерные для аксиоматических систем вообще.

Чтобы устройство системы аксиом Гильберта, да и любой системы аксиом геометрии, было более понятным, — важное предварительное замечание. В аксиомах геометрии встречаются те или иные геометрические понятия — такие, как, например, ‘угол’ (для обозначения понятий принято использовать так называемые *одинарные кавычки* — такие, какими мы только что окружили слово «угол»). Чтобы понимать смысл аксиомы, мы должны иметь представление о смысле участвующих в аксиомах понятиях — говоря попросту, понимать, что эти понятия означают. Но как можно составить представление о том или ином понятии? Есть два основных способа, один из которых мы условно назовем *наглядным*, а другой, столь же условно, *дефиниционным* (от латинского существительного «definitio», произносимого как «дэфини́цио» и переводящегося на русский как «определение»).

При наглядном способе понятие усваивается на примерах, при дефиниционном — с помощью определений. Скажем, усвоение понятий ‘стол’ и ‘корова’ происходит на основе того, что человеку показывают достаточное количество столов и коров. Таким же наглядным способом могут усваиваться и понятия, выражающие свойства, такие, например, как ‘металлический’ или ‘фиолетовый’; для этого нужно предъявить достаточное количество металлических предметов и предметов фиолетовой окраски. Аналогичным образом человек обучается понятиям, выражающим положение в пространстве одних предметов относительно других, таких как ‘слева от’, ‘справа от’, ‘спереди’, ‘сзади’, ‘над’, ‘под’, ‘на’, ‘в’, ‘между’ и т. п.

А вот представление о понятиях ‘металлический стол’ или ‘фиолетовая корова’ можно получить, и не прибегая к примерам (в случае фиолетовой коровы это было бы и затруднительно). Здесь годится способ дефиниционный. Понятия ‘металлический стол’ и ‘фиолетовая корова’ можно не показать, а определить: металлический стол — это такой стол, который является металлическим; фиолетовая корова — это такая корова, которая является фиолетовой.

Наглядным способом происходит и первое знакомство с такими математическими понятиями, как, скажем, шар или прямая. Однако здесь надо проявить осторожность и понимать, что арбуз в меньшей степени шар, чем волейбольный мяч, а мяч — в меньшей степени шар, чем биллиардный шар или подшипник: ведь, строго говоря, геометрических шаров в природе не бывает, а бывают лишь предметы, приближающиеся по форме к геометрическому шару. С прямыми дело обстоит еще сложнее: ведь прямая бесконечна, а все примеры, которые мы можем предъявить, будь то линия, начерченная на песке или бумаге, или натянутая нить, или граница между стеной и потолком — все они демонстрируют нам (опять-таки, разумеется, приблизительно) лишь ограниченные, конечные участки прямых линий, то есть то́, что на языке современной геометрии называется отрезками. Отметим, что в трактате Евклида термин «прямая» обозначает не всю бесконечную прямую линию, а именно отрезок. Для возникновения представления о бесконечной прямой одного только наглядного способа недостаточно — требуется еще воображение. От зарождения геометрии прошли тысячелетия, пока люди осознали, что мы не можем непосредственно наблюдать точки, прямые, плоскости, углы, шары и прочие геометрические объекты и потому предметом геометрии служит не реальный мир, а мир воображаемый, который населен этими идеальными геометрическими объектами и который всего лишь похож на мир реальный (как говорят философы, является *отражением* реального мира).

Таким образом, к геометрическим понятиям наглядный способ применим лишь с оговорками. Посмотрим, как работает дефиниционный способ. Возьмем для примера понятие угла. Можно объяснять это понятие, демонстрируя конкретные углы, т. е. применяя наглядный способ. А можно воспользоваться способом дефиниционным, т. е. попытаться определить, что такое угол. Вот определение: угол есть совокупность (другими словами — множество) двух лучей, исходящих из одной и той же точки O. Но тогда надо знать, что такое «луч, исходящий из точки O». Это понятие, в свою очередь, определяется как множество, состоящее из самой этой точки O и всех точек, расположенных по одну и ту же сторону от этой точки. Но что́ значит, что две точки лежат «по одну и ту же сторону» от точки O? Это значит, что эти две точки и точка O лежат на одной и той же прямой, причем так, что точка O не находится между этими двумя точками. Но тогда мы должны сперва знать, что означает, что одна точка находится «между» двумя другими.

Итак, при дефиниционном способе одни понятия определяются через другие, другие через третьи и т. д. Но ведь мы не можем продолжать этот процесс бесконечно. А значит, на каких-то геометрических понятиях мы вынуждены остановиться и далее их не определять. Эти понятия, которые уже не имеют определения, называют **неопределяемыми** или **исходными**. Но если исходные понятия не могут быть определены, то, спрашивается, откуда же мы можем знать, что они означают? Казалось бы, ответ очевиден: мы должны использовать наглядный способ и познать эти понятия из непосредственного опыта, иными словами — усвоить их на примерах. Однако несколькими строками выше было отмечено, что на примерах можно получить хотя и близкое, но все-таки лишь приблизительное представление о том или ином геометрическом понятии. А математика — наука точная, приблизительность ей не к лицу, и математик должен совершенно точно знать, каким именно понятием он оперирует. Вроде бы возник тупик. Аксиоматический метод как раз и предлагает выход из этого тупика.

Чтобы понять этот выход, еще раз осмыслим встающую перед нами проблему. Мы хотим рассуждать о некоторых понятиях, причем рассуждать совершенно точно. Но точности наших рассуждений мешает то обстоятельство, что эти понятия не имеют определений. Тогда поступим так. Попытаемся выписать основные свойства этих понятий, а именно те свойства, на которые мы будем опираться в наших рассуждениях. Дадим себе обещание не использовать в рассуждениях никаких иных свойств, кроме тех, которые внесены нами в наш список основных свойств. Каждый отдельный элемент списка, в котором фиксированы какие-то определенные свойства рассматриваемых понятий, будем называть **аксиомой**, сам же список — **системой аксиом**. Рассуждения же, которые не опираются ни на какие свойства понятий, кроме явно указанных в аксиомах, — это и есть те самые **чисто логические рассуждения**, которые упоминались в начале § 1.

Очевидно, что построению системы аксиом должно предшествовать составление перечня исходных, или неопределяемых, понятий. Надо подчеркнуть, что составление такого перечня во многих чертах произвольно и зависит от вкуса составителя. Например, можно взять за исходное понятие понятие отрезка (как это по существу и делает Евклид) и с его помощью определять понятие прямой, а можно, напротив, взять за исходное понятие понятие прямой (как это и делается в большинстве современных аксиоматических систем), а через него уже определять понятие отрезка. Говоря о трех точках O, A, B некоторой прямой, мы определили (см. выше) понятие 'лежать по одну сторону от O' через понятие 'находиться между A и B'. А могли бы наоборот, следующим образом определить второе понятие через первое: 'точка Q находится между точками A и B' означает, что A и B не лежат по одну сторону от Q. Таким образом, по желанию составителя системы аксиом геометрии в качестве исходного можно принять одно из двух понятий: 'находиться между' или 'лежать по одну сторону'.

Для своей системы аксиом геометрии Гильберт выбирает восемь исходных, или неопределяемых, понятий: **точка, прямая, плоскость, отношение связи точки и прямой, отношение связи точки и плоскости, отношение 'находиться между'** (для точек), **отноше-**

ние равенства отрезков, отношение равенства углов. Список же своих аксиом он для удобства изложения разбивает на пять групп. Так же поступим и мы.

Аксиомы первой группы говорят о способах, которыми прямые и плоскости связываются, соединяются или сочетаются с точками. Поэтому их называют *аксиомами связи*, или *аксиомами соединения*, или *аксиомами сочетания.* Наглядно мы себе представляем, чтó значит, что какая-то точка лежит на какой-то прямой или на какой-то плоскости. Это соотношение между точкой A и прямой или плоскостью p словесно можно выразить по-разному: «A лежит на p», «p проходит через A», «A соединяется (сочетается) с p». Все эти взятые в кавычки обороты синонимичны, они выражают один и тот же факт. Таким образом, слова разные, а понятие одно и то же; его можно называть и ‘соединяться’, и ‘сочетаться’, и ‘лежать на’, и ‘проходить через’.

В обычной, «школьной» геометрии прямая рассматривается как множество точек. В аксиоматической геометрии прямые — это просто такие особые вещи, некоторые из которых связаны (соединяются, сочетаются и т. д.) с другими вещами, точками. Но каждой прямой отвечает *множестве точек, лежащих на этой прямой.* Вместо того, чтобы говорить длинно: «точка A принадлежит множеству точек, лежащих на прямой p», говорят короче: «точка A принадлежит прямой p» (и эта фраза выражает то же, что и фраза «p проходит через A»). Аналогично, фразу «точка A принадлежит множеству точек, лежащих на плоскости π» сокращают до фразы: «точка A принадлежит плоскости π» (и эта фраза выражает то же, что и фраза «π проходит через A»). Поэтому отношения связи называют также **отношениями принадлежности**, а аксиомы связи — *аксиомами принадлежности.*

§ 4. Первая группа аксиом Гильберта: аксиомы связи

Предупредим читателя, что аксиомы Гильберта — как первой, так и других групп — мы выписываем не всегда в их первоначальной форме, а допуская некоторые усовершенствования, найденные последователями Гильберта. Некоторые аксиомы Гильберта мы будем расчленять на две, некоторые же пары его аксиом, напротив, собирать в единую аксиому. Так что наша нумерация аксиом будет несколько отличаться от гильбертовой.

В силу сказанного выше, аксиомы первой группы описывают понятие, выражаемое словами «лежать на» (а также словами «проходить через», «соединяться», «сочетаться», «принадлежать»), не непосредственно, а через указание основных его свойств. Итак,

Аксиомы связи, или **аксиомы принадлежности**

Аксиома I.1. *Через каждые две различные точки проходит прямая и притом только одна.*

Аксиома I.2. *Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки.*

Аксиома I.3. *Существуют три точки, не лежащие на одной и той же прямой.*

Аксиома I.4. *Через каждые три точки, не лежащие на одной и той же прямой, проходит плоскость и притом только одна.*

Аксиома I.5. *Каждой плоскости принадлежит по крайней мере одна точка.*

Аксиома I.6. *Если две различные точки лежат на некоторой прямой и на некоторой плоскости, то и всякая точка, лежащая на этой прямой, лежит на этой плоскости.*

Аксиома I.7. *Никакие две различные плоскости не могут иметь ровно одну принадлежащую им обеим точку.*

Аксиома I.8. *Существуют четыре точки, не лежащие на одной и той же плоскости.*

Замечание. Поскольку словесные обороты «проходить через», «лежать на», «принадлежать» и т. д. выражают одно и то же понятие, то аксиому I.1 можно было бы сформулировать и так: *для каждых двух различных точек существует единственная прямая, с которой они связаны* (или *на которой они лежат*). А аксиому I.5, скажем, так: *каждая плоскость проходит через, по крайней мере, одну точку.* Рекомендуем читателю поупражняться в переформулировании и других аксиом.

Посмотрим теперь, как работают эти аксиомы. С этой целью попытаемся доказать несколько теорем про точки, прямые, плоскости и отношение принадлежности. Рассказывают, что когда в XVIII веке во Франции один математик попытался доказать какую-то теорему одному аристократу, тот возразил: «А зачем доказывать? Я дворянин и Вы дворянин; я Вам верю на слово; для меня Ваше честное слово — лучшее доказательство!». Мы же не должны опираться не только на чье-либо честное слово, но даже и на привычные представления о том, что́ такое точка, прямая, плоскость и отношение принадлежности точки к прямой или к плоскости. Единственное, что нам разрешается использовать, — это те свойства этих понятий, которые явно сформулированы в аксиомах.

Теорема 1. Две различные прямые не могут иметь более одной точки, принадлежащих им обеим.

Доказательство от противного. Предположим, что различные прямые p и q имеют по крайней мере две точки, принадлежащие им обеим. Тогда через эти две точки проходят и прямая p, и прямая q, что́ противоречит аксиоме I.1.

Теорема 2. Пусть прямая проходит через две различные точки, а третья точка не лежит на этой прямой. Тогда не существует прямой, проходящей через все эти три точки.

Комментарий. Предвидим удивление читателя. Чего же тут доказывать? Ведь сказано же, что прямая проходит лишь через две точки, а через третью не проходит. Действительно, все три точки не могут лежать на той прямой, которая упомянута в условии теоремы. А вдруг они лежат на какой-нибудь другой прямой? Чертеж показывает, что этого не может быть. Но чертеж нас не устраивает, поскольку он апеллирует к пространственной наглядности. Нам же нужно обнаружить невозможность прямой, проходящей через все три точки, чисто логическими рассуждениями, т.е. опираясь на аксиомы и только на них.

Доказательство, конечно же, очень простое: любая прямая, проходящая через все три точки, совпадает с единственной (в силу аксиомы I.1) прямой p, проходящей через первые две, а третья точка, по условию, на p не лежит.

Теорема 3. Для каждых двух различных точек A и B найдется такая точка C, что точки A, B и C не лежат на одной прямой.

Комментарий. Надлежит понимать отличие формулировки этой теоремы от формулировки аксиомы I.3. В аксиоме I.3 утверждается, что существуют какие-то три точки, не лежащие на одной прямой. А в теореме 3 утверждается более сильный факт, а именно, что две из этих трех точек могут быть назначены произвольно, по нашему выбору.

Доказательство. Пусть p — прямая, проходящая через A и B (таковая существует в силу аксиомы I.1). Не может быть, чтобы все точки лежали на этой прямой: это противоречило бы аксиоме I.3. Значит, существует точка C, не лежащая на p. В силу теоремы 2 точки A, B и C не лежат ни на какой одной и той же прямой.

Теорема 4. Для каждой плоскости существует более одной принадлежащей ей точки.

Доказательство. Рассмотрим произвольную плоскость α. Наша цель — обнаружить по крайней мере две различные точки, лежащие на этой плоскости. Одна такая точка заведомо существует: это утверждает аксиома I.5. Обозначим эту точку A. Не может быть, чтобы все точки лежали на плоскости α: это противоречило бы аксиоме I.8. Значит, есть точка B, не лежащая на α. Разумеется, B отлична от A, поскольку A лежит на α. Поэтому мы можем применить теорему 3 и найти точку C такую, что точки A, B, C не лежат на одной прямой. Теперь мы можем взять плоскость, проходящую через эти три точки; такая плоскость существует в силу аксиомы I.4; обозначим ее β. Плоскости α и β различны, поскольку вторая проходит через B, а первая нет. В то же время имеется точка, принадлежащая им обеим, это A. По аксиоме I.8 невозможно, чтобы такая общая точка была единственна; значит, есть еще какая-то точка, принадлежащая и α, и β. Вот мы и обнаружили еще одну точку (помимо A), принадлежащую плоскости α.

Доказательства теорем 1–4 могут показаться читателю довольно занудными. Вероятно, так оно и есть. Мы привели эти доказательства для того, чтобы читатель мог на личном опыте познакомиться с тем, как происходят чисто логические, т. е. основанные только на аксиомах, рассуждения. Рекомендуем читателю убедиться, что в проведенных доказательствах действительно не используется никаких сведений о точках, о прямых, об отношении принадлежности точки к прямой и об отношении принадлежности точки к плоскости кроме тех, которые явно указаны в аксиомах.

На основе исходных, неопределяемых понятий можно сконструировать новые, *определяемые* понятия. Вот примеры определяемых понятий:

1. *Пересекаться* (о прямых и плоскостях). Про две различные прямые, про две различные плоскости, а также про прямую и плоскость условимся говорить, что они *пересекаются*, если существует точка, принадлежащая им обеим.

2. *Принадлежать, лежать на, проходить через* (о прямой и плоскости) — все это синонимичные словесные обороты, выражающие одно и то же понятие. Условимся говорить, что прямая *принадлежит* плоскос-

ти, или что прямая *лежит на* плоскости, или что плоскость *проходит* через прямую, если каждая точка, принадлежащая (лежащая на) этой прямой, принадлежит и этой плоскости (а с равным успехом мы могли бы сказать и так: если эта плоскость проходит через каждую точку, через которую проходит эта прямая). Аксиому I.6 мы можем переписать теперь несколько короче в виде I.6*:

Аксиома I.6*. *Если две различные точки лежат на некоторой прямой и на некоторой плоскости, то эта прямая лежит на этой плоскости.*

Замечание. Призываем читателя осознать разницу между, с одной стороны, *логической природой понятия принадлежности* точки к прямой и понятия принадлежности точки к плоскости и, с другой стороны, логической природой только что введенного понятия принадлежности прямой к плоскости. Первые два не имеют определения, они служат исходными понятиями, свойства которых даются в аксиомах. Третье же определяется через два первых. Полезно осознавать, что в нашей власти было бы не определять понятие принадлежности прямой к плоскости, а объявить его исходным, неопределяемым. Но тогда пришлось бы добавить к аксиомам принадлежности аксиому, описывающую свойства этого нового исходного понятия, а именно такую аксиому: *прямая тогда и только тогда принадлежит плоскости, когда каждая точка, лежащая на этой прямой, принадлежит этой плоскости.*

Теорема 5. Пусть две различные прямые пересекаются. Тогда существует ровно одна плоскость, проходящая через эти прямые.

Доказательство. Пусть различные прямые p и q пересекаются. По определению понятия ‘пересекаться’, существует точка A, лежащая на каждой из них. В силу аксиомы I.2 на прямой p лежит еще одна, отличная от A, точка B, а на прямой q — отличная от A точка C. Если бы точка B лежала на q, то через точки A и B проходили бы две различные прямые p и q, что противоречило бы аксиоме I.1; поэтому B не лежит на q. Итак, A и C лежат на q, а B — нет; поэтому, в силу теоремы 2, точки B, A, C не лежат на одной прямой. Применим к ним аксиому I.4; находим плоскость π, проходящую через эти три точки. Поскольку на π лежат точки A и B, принадлежащие прямой p, то в силу аксиомы I.6* на π лежит и сама эта прямая p. Поскольку на π лежат точки A и C, принадлежащие прямой q, то в силу аксиомы I.6* на π лежит и сама эта прямая q. Итак, плоскость, проходящую через p и q мы нашли: это π. Осталось убедиться, что такая плоскость единственна. Действительно, всякая плоскость, проходящая через p и q, *должна проходить через точки* A, B *и* C; *но в силу* аксиомы I.4 такая плоскость только одна, а именно π.

Теорема 6. Пусть две различные плоскости пересекаются. Тогда существует прямая, обладающая одновременно следующими двумя свойствами: 1) она принадлежит обеим плоскостям; 2) всякая точка, принадлежащая обеим плоскостям, принадлежит этой прямой.

Комментарий. Эта теорема на более привычном геометрическом языке звучит так: если две различные плоскости пересекаются, то они пересекаются по прямой. Почему же мы так прямо и не сказали, а прибегли к более длинной формулировке, включающей два свойства прямой? А потому, что при аксиоматическом построении какой-либо теории не допускается употребление никаких понятий, кроме заранее оговоренных неопределяемых и тех, которые явно определены на основе неопределяемых. Ни в числе неопределяемых, ни в числе уже определенных у нас нет понятия 'две плоскости пересекаются по прямой'. Разумеется, его можно определить. Давайте это сделаем. Будем говорить, что плоскость α и плоскость β *пересекаются по прямой* p, если 1) p принадлежит и α, и β; 2) всякая точка, принадлежащая обеим плоскостям, принадлежит прямой p. Вот теперь (но только теперь!) мы получаем право сформулировать теорему 6 привычным образом: *если две плоскости пересекаются, то они пересекаются по некоторой прямой.*

Доказательство. Пусть плоскости α и β различны и проходят через некоторую точку A. По аксиоме I.7 они должны проходить и через какую-то другую точку B. По аксиоме I.1 существует прямая p, проходящая через A и B. Убеждаемся, что прямая p обладает требуемыми свойствами. Действительно, точки A и B лежат и на прямой p, и на плоскости α; поэтому, по аксиоме I.6*, прямая p принадлежит плоскости α. По той же причине p принадлежит β. Таким образом, p принадлежит обеим плоскостям, так что первое свойство выполнено. Проверим выполнение второго свойства. Для этого берем произвольную точку C, лежащую и на α, и на β, и доказываем от противного, что она лежит на p. Действительно, предположим, что C не лежит на p. Тогда, в силу теоремы 2, A, B, C есть тройка точек, не лежащих на одной прямой, и по аксиоме I.4 возможна лишь одна плоскость, которой все эти точки принадлежат. А у нас получилось, что все эти три точки принадлежат и плоскости α, и плоскости β, причем эти плоскости различны. Полученное противоречие доказывает, что C лежит на p, что и требовалось.

Конечно, когда на уроке в классе или на страницах учебника излагается доказательство какой-либо теоремы геометрии, это не делается с той скрупулезностью, с какой мы провели доказательства шести только что приведенных теорем. Дело в том, что в доказательствах, осуществляемых в классе или в учебниках, используемые аксиомы чаще всего не указываются явно, а подразумеваются. И мы вовсе не призываем читателя во всех случаях явно указывать те аксиомы, на которые опирается рассуждение. Наша цель была другая: на примере аксиом связи и некоторых простейших теорем показать, как выглядят полные доказательства, содержащие явные ссылки на все используемые аксиомы. Без этого было бы трудно понять суть аксиоматического метода. Рекомендуем читателю самостоятельно доказать две простые теоремы: 1) ***каждая точка лежит на некоторой прямой***; 2) ***каждая прямая лежит на некоторой плоскости.***

Полезно научиться осознавать, какие именно предпосылки лежат в основе тех или иных геометрических фактов, тех или иных рассуждений. Для примера завершим этот параграф анализом следующего факта: прямая полностью определяется множеством лежащих на ней точек. Ясно, что каждой прямой отвечает одно совершенно определенное множество, состоящее из всех тех и только тех точек, через которые она проходит. Если, напротив, дано некоторое множество M точек, то, разумеется, может и не быть такой прямой p, для которой M состоит из всех тех и только тех точек, которые лежат на p. Однако если такая прямая существует, то она единственна (именно в этом и состоит смысл фразы, что прямая полностью определяется множеством лежащих на ней точек). Вопрос: какую аксиому или какие аксиомы надо использовать для доказательства единственности? Ответ: сначала I.2, а затем I.1. Действительно, сначала аксиома I.2 сообщает нам, что в M можно обнаружить две различные точки, а затем аксиома I.1 — что прямая, на которой лежат обе эти точки, а тем более все точки множества M, единственна.

§ 5. Непротиворечивость, совместность, независимость системы аксиом

Первый вопрос, который естественно возникает при знакомстве с какой-либо системой аксиом, таков. Возможно ли наполнить смыслом те неопределяемые понятия, которые встречаются в аксиомах? Иными словами, существуют ли «на самом деле» соответствующие объекты и *отношения*?

Поясним суть вопроса на примере аксиом связи. В этих аксиомах провозглашаются некоторые свойства точек, прямых, плоскостей, отношения принадлежности точки к прямой и отношения принадлежности точки к плоскости. Спрашивается, а бывают ли вообще такие вещи и такие отношения между ними, чтобы все заявленные в аксиомах свойства выполнялись. Вопрос кажется странным, поскольку кажется очевидным утвердительный ответ: да, такой пример таких вещей и таких отношений привести можно, его образуют обычные, хорошо известные из школьной геометрии точки, прямые, плоскости, отношения принадлежности. Однако мы не зря употребили слово «кажется». Потому что на самом деле все не так просто. Ведь, как отмечалось в § 3, в природе не существует точек, прямых, плоскостей. Точки, прямые и плоскости существуют только в нашем воображении. Но ведь в воображении существует и крылатый конь Пегас. В качестве примера надо привести что-нибудь более бесспорное, нежели обычные геометрические объекты. Ведь аксиомы геометрии как раз и были созданы для того, чтобы мы могли рассуждать об этих объектах, не опираясь на наглядность. Так что вопрос о наполнении аксиом связи конкретным содержанием пока остается.

Сейчас мы ответим на этот вызов. Мы предъявим некоторую совокупность вещей, которые мы назовем точками, некоторую другую совокупность вещей, которые мы назовем прямыми, и некоторую третью совокупность вещей, которые мы назовем плоскостями. Далее мы объявим, какие вещи первой совокупности, названные точками, и какие вещи второй совокупности, названные прямыми, связаны между собой. И, наконец, объявим, какие точки связаны с какими вещами третьей совокупности, названными плоскостями. После чего убедимся, что для этих вещей и этих отношений связи выполняются все аксиомы связи.

Представим себе тетраэдр (т. е треугольную пирамиду) с вершинами A, B, C, D (см. рис. 2). Буквами p, q, r, s, t, u обозначим ребра тетраэдра BC, CA, AB, DA, DB, DC, взятые именно в таком порядке. Буквами α, β, γ, δ обозначим грани тетраэдра BCD, ACD, ABD, ABC, взятые именно в таком порядке. Вершины тетраэдра и образуют нашу первую совокупность, и мы назовем их точками. Ребра образуют вторую совокупность, их мы назовем прямыми. Грани образуют третью совокупность, их мы назовем плоскостями. Таким образом, в той геометрии, которую мы строим, 4 точки,

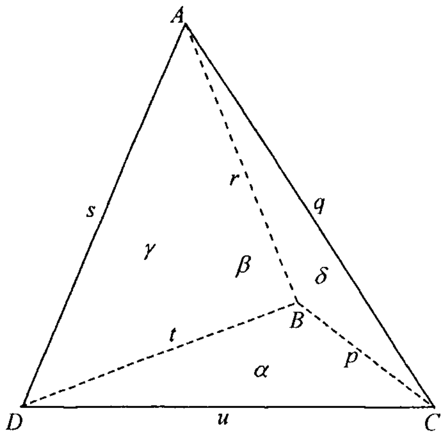


Рис. 2

6 прямых и 4 плоскости, а всего 14 объектов. Однако надо еще задать два отношения связи — между точками и прямыми и между точками и плоскостями. Отношение связи между точками и прямыми зададим так. Скажем, что некоторая точка связана с некоторой прямой, если та вершина тетраэдра, которой является эта точка, служит концом того ребра, которым является эта прямая. Отношение связи между точками и плоскостями зададим так. Скажем, что некоторая точка связана с некоторой плоскостью, если та вершина, которой является эта точка, служит вершиной той грани тетраэдра, которой является эта плоскость.

Легко проверить следующий факт: для каждых двух точек найдется единственная прямая, с которой они связаны. Например, для точек B и D такой прямой будет t. Как и прежде, выражения «точка и прямая связаны», «точка принадлежит прямой», «точка лежит на прямой», «прямая проходит через точку» мы считаем синонимичными, т. е. обозначающими одно и то же. Поэтому факт, в справедливости которого мы только что убедились, можно записать так: *через каждые две различные точки проходит прямая и притом только одна.* Но ведь это есть в точности формулировка аксиомы I.1! Далее мы видим, что на каждой прямой лежат ровно две точки (например, на прямой q — точки A и C). Значит, *каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки.* А это есть формулировка аксиомы I.2! Мы начинаем подозревать, что для нашей системы, состоящей из 14 объектов (4 точек, 6 прямых и 4 плоскостей) и декларированных нами отношений между этими объектами, выполняются все восемь аксиом связи. Так оно и есть, и мы призываем читателя проверить оставшиеся шесть аксиом I.3–I.8.

Читатель, впрочем, может усомниться в законности приведенной конструкции. Ведь выше мы заявили, что в природе точек, прямых и плоскостей не существует, а тут рассматриваем тетраэдр, вроде бы как раз и возникающий в результате пересечения шести геометрических плоскостей. А вершины тетраэдра — это разве не геометрические точки? А ребра разве не отрезки геометрических прямых? На это мы возразим, что тетраэдр можно представлять себе совершенно материально. Возьмем шесть стержней и соберем из них тетраэдр. В вершинах разместим шесть шишек, а каждую грань обтянем листом бумаги. Мы получим совершенно реальную конструкцию. Теперь точками надо объявить шишки, прямыми — стержни, плоскостями — листы. И, как и прежде, задать отношения связи. Все аксиомы связи будут выполнены для нашей шишечно-бумажной конструкции.

Вообще, рассмотрим три вида каких-либо предметов. Это могут быть шишки, стержни и бумажные листы, или яблоки, книги и карандаши, или спички, стулья и иголки — короче, что хотите. Предметы первого вида назовем точками, предметы второго вида — прямыми, предметы третьего вида — плоскостями. Точек у нас будет четыре; мы обозначим их A, B, C, D. Прямых у нас будет шесть, и мы обозначим их p, q, r, s, t, u. Плоскостей — четыре; их обозначения: α, β, γ, δ. Про некоторые точки и прямые объявим, что они *связаны* друг с другом. А именно, точку A объявим связанной с прямыми q, r, s; точку B — с прямыми p, r, t; точку C — с прямыми p, q, u; точку D — с прямыми s, t, u. А также объявим связанными некоторые точки и некоторые плоскости. А именно: плоскость α — с точками B, C, D; плоскость β — с точками A, C, D; плоскость γ — с точками A, B, D; плоскость δ — с точками A, B, C. Все аксиомы связи будут выполнены.

Итак, первая группа аксиом геометрии выполняется для системы из 4 точек, 6 прямых и 4 плоскостей — при условии, что отношения принадлежности заданы надлежащим образом (а именно так, как мы их определили). Поэтому саму эту систему естественно называть *геометрией 14 объектов* или, принимая во внимание нашу шишечно-бумажную конструкцию, **геометрией тетраэдра**. При этом нас не интересует, что́ такое точки, прямые и плоскости «на самом деле». Как говорят математики — это *объекты произвольной природы*. Равным образом нас не интересует, что́ «на самом деле» означает, что точка *связана* с прямой или с плоскостью. Нам важно лишь быть уверенным, что выполняются аксиомы связи.

В а ж н о е З а м е ч а н и е. Поскольку для геометрии тетраэдра выполняются все аксиомы связи, то должны быть справедливы и все теоремы, чисто логически выведенные из этих аксиом — в частности, все теоремы предыдущего параграфа. Давайте, для иллюстрации, применим теорему 6 к плоскостям α и δ. Они проходят через одну и ту же точку C, т.е. пересекаются. По теореме 6 они пересекаются по некоторой прямой. Нетрудно найти эту прямую: это p.

А теперь настало время задаться вопросом: есть ли какой-нибудь содержательный смысл в построении геометрии тетраэдра или же это просто игра ума? Ответ предварим следующим замечанием, с которым, хотелось бы надеяться, согласится читатель: даже если бы это было только игрой ума, все равно это было бы интересно и поучительно. Однако, как мы сейчас увидим, предъявление геометрии тетраэдра имеет совершенно фундаментальные последствия.

Одно из них таково. С помощью аксиом связи мы можем доказывать те или иные утверждения о геометрических объектах. Мы видели это на примере теорем предыдущего параграфа. Пусть у нас есть какое-то утверждение о точках, прямых и т.д. Если его можно доказать, то это обстоятельство, т.е. возможность доказать, можно обнаружить, найдя доказательство. Но предположим, что его нельзя доказать. Можно ли обнаружить невозможность доказательства? Оказывается, что в некоторых случаях можно. Рассмотрим, например, такое утверждение: на каждой прямой лежат по крайней мере три точки. Покажем, что его нельзя доказать, опираясь на аксиомы связи и только на них. Действительно, если его можно было бы доказать, то в силу Важного Замечания оно выполнялось бы для нашей геометрии тетраэдра — но ведь здесь оно не выполняется, поскольку здесь каждой прямой принадлежат ровно две точки.

Таким образом, геометрия тетраэдра дает нам в руки важный инструмент: она позволяет обнаружить, что одних только аксиом связи недостаточно для доказательства важных геометрических фактов. И этим еще не все сказано. Ведь и так понятно, что с помощью одних только аксиом связи нельзя доказать что-нибудь, касающееся отношения 'лежать между' или отношения равенства геометрических фигур, поскольку в этих аксиомах ничего не говорится об этих отношениях. Здесь же замечательно то, что нам удалось привести факт (о количестве точек на прямой), формулируемый исключительно в терминах принадлежности (т.е. не использующий никаких иных понятий кроме тех, которые упоминаются в аксиомах связи) и верный в «обычной геометрии», но не вытекающий из аксиом связи.

Но и это еще не главное последствие существования геометрии тетраэдра. Главное состоит в **непротиворечивости** аксиом связи.

Чтобы понять, что означает непротиворечивость какой-либо системы аксиом, вообразим, что мы столкнулись со следующей малоприятной ситуацией: нам удалось доказать, что существуют такая пара пересекающихся прямых, для которой нет никакой плоскости, проходящей через обе эти прямые. К счастью, такое доказательство невозможно, но представим себе на минуту, что оно существовало бы. Тогда выходило бы, что мы доказали утверждение, противоречащее теореме 5. Иными словами, у нас оказались бы доказанными и некоторое утверждение, а именно теорема 5, и противоречащее ему утверждение. Но ведь невозможно, чтобы было верным и утверждение, и противоречащее ему. Стало быть, наши доказательства приводят к неверным фактам. Грош цена таким доказательствам! И не нужны такие системы аксиом, на которых подобные доказательства основываются. Таким образом, если бы случилось так, что из аксиом связи вытекает как некоторое утверждение, так и ему противоречащее утверждение, то аксиомы связи были бы не просто бесполезны, но прямо-таки вредоносны.

Система аксиом называется **противоречивой**, если из нее чисто логическим путем можно вывести как некоторое утверждение, так и утверждение, противоречащее первому. Система аксиом называется **непротиворечивой**, если она не является противоречивой, то есть если не может случиться так, чтобы, опираясь на аксиомы этой системы, можно было доказать какие-нибудь два противоречащих друг другу утверждения.

Противоречивые системы аксиом вредны и их не следует вводить; но дело в том, что противоречивость может не сразу выявиться. Ясно, что если в одной аксиоме будет сказано, что через каждые две точки можно провести прямую, а в другой — что существуют две точки, не лежащие на одной прямой, то всякая система аксиом, содержащая эти две аксиомы, окажется противоречивой; здесь противоречивость видна сразу. А что если противоречащие друг другу утверждения появятся не скоро, а только после сложных и длительных доказательств? Очень хотелось бы знать заранее, что они не появятся. Поэтому весьма желательно располагать такими признаками, наличие которых у системы аксиом гарантирует ее непротиворечивость. Несколькими строками ниже мы укажем такой признак, но пока что вернемся к аксиомам связи.

Выше мы заявили, что система аксиом связи непротиворечива. Убедимся, что это действительно так. С этой целью предположим, что система аксиом связи противоречива, и убедимся, что этого не может быть. В самом деле, если бы она была противоречива, то в этом случае было бы можно, основываясь на этих аксиомах, доказать два противоречащих друг другу утверждения **A** и **B** о точках, прямых, плоскостях и отношениях принадлежности. Теперь возьмем нашу геометрию тетраэдра. Для нее верны не только сами аксиомы связи (это мы проверили), но и все доказанные на основе этих аксиом утверждения (это было отмечено в сделанном выше Важном Замечании) — в частности, верны утверждения **A** и **B**. Но ведь ни для никакой системы объектов не может быть так, чтобы для нее одновременно были справедливы два противоречащих друг другу утверждения. Значит, какое-то из наших двух утверждений не может быть доказано, опираясь на аксиомы связи и только на них.

Мы только что видели, что наличие геометрии тетраэдра позволяет утверждать непротиворечивость аксиом связи. А ведь если бы у нас не было уверенности в их непротиворечивости, бессмысленно было бы заниматься изобретением дальнейших аксиом.

Сам метод, посредством которого мы установили непротиворечивость аксиом связи, чрезвычайно важен и носит универсальный характер. Он состоит в построении так называемой *модели* для той системы аксиом, непротиворечивость которой мы хотим установить.

Каждая, вообще, система аксиом описывает какие-то объекты и отношения между ними. Так, аксиомы связи описывают точки, прямые, плоскости и отношения принадлежности. Слово «описывает» имеет здесь следующий точный смысл: участвующие в аксиомах исходные объекты и исходные отношения не определяются, а характеризуются исключительно посредством указания свойств этих объектов и отношений. Всякая совокупность таких объектов и таких отношений, которая удовлетворяет всем требованиям рассматриваемой системы аксиом, т. е. для которой выполнены все сформулированные в аксиомах свойства, называется **моделью** этой системы аксиом. Например, геометрия тетраэдра образует модель системы аксиом связи. У этой системы есть и другие модели; некоторые из них мы увидим ниже. (З а м е ч а н и е в с к о б к а х. Может возникнуть вопрос, является ли совокупность «обычных» геометрических точек, прямых и плоскостей и «обычных» отношений принадлежности моделью аксиом связи. На этот вопрос надо отвечать так: вопрос недостаточно ясно поставлен. Действительно, точки, прямые и т. д. в реальном физическом мире не встречаются, что же касается наших мысленных представлений о них, то аксиомы геометрии, в частности аксиомы связи, как раз и имеют целью сделать эти представления более ясными для нас самих.)

Система аксиом называется **совместной**, если она имеет модель. Построив геометрию тетраэдра, мы доказали совместность системы аксиом связи. А уже из совместности мы вывели непротиворечивость. Можно заметить, что наши рассуждения имели совершенно общий характер — они применимы к любой системе аксиом, а не только к аксиомам связи. Поэтому имеет место следующая теорема логики:

Если система аксиом совместна, то она непротиворечива.

Совместность системы аксиом является простым и очевидным достаточным условием ее непротиворечивости.

Мы только что видели, что система аксиом связи совместна и потому непротиворечива. Этот же факт справедлив и для системы геометрических аксиом Гильберта в ее полном объеме, включающем и другие группы аксиом:

Система аксиом Гильберта совместна и потому непротиворечива.

Совместность аксиом Гильберта вытекает из возможности предъявить для них модель.

Философское замечание. Однако задумаемся, какая модель для аксиом геометрии будет для нас убедительной. Можно ли взять в качестве модели совокупность точек, прямых и плоскостей окружающего нас пространства? Конечно, нет. Ведь точки, прямые и плоскости не присутствуют в этом пространстве как реальные физические объекты, а существуют лишь в нашей мысли. Для разъяснения и уточнения свойств этих мысленных объектов и была создана исследуемая аксиоматика, поэтому вопрос о ее непротиворечивости должен решаться без обращения к этим объектам (их право на существования как раз и вытекает из непротиворечивости). Какая же модель нас устроит? Лучше всего было бы построить модель из реальных предметов, подобно тому как из шишек, стержней и бумаги была построена геометрия тетраэдра. Но это, увы, невозможно. Такое удалось нам лишь когда мы изолированно изучали одну только группу аксиом связи. Но уже подключение аксиом порядка приводит к тому, что — как показывает теорема 10 из § 7 — появляется бесконечно много точек (а вслед за тем и бесконечно много прямых и плоскостей). Но никакой реальной конструкции, состоящей из бесконечного числа объектов, предъявить, разумеется, нельзя. Значит, можно предъявить только мысленную конструкцию. А тогда опять встает тот же «проклятый вопрос»: законно ли мы оперируем с мысленными представлениями, не запутались ли мы в них (возможно, не замечая этого), не приведет ли оперирование с ними к противоречию или неясности. Ответить на этот «проклятый вопрос» исчерпывающим образом скорее всего невозможно. По крайней мере, до сего дня никто не ответил. Наиболее честный ответ такой: мы считаем возможным пользоваться теми содержащимися в наших мыслях математическими представлениями, многовековое пользование которыми до сих пор к противоречию не приводило. Так, модель для аксиоматики геометрии строится с помощью действительных чисел. Действительные числа — столь же воображаемые объекты, как и объекты геометрии. Поэтому утверждение о совместности аксиоматики Гильберта носит не абсолютный, а относительный характер: оно верно, если мы принимаем существование действительных чисел. Законно ставить их существование под сомнение, поскольку они не являются реальными объектами, а присутствуют (так же, как точки, прямые и плоскости) только в нашем воображении. Обычно математики не сомневаются в существовании действительных чисел, но раз уж мы занялись философскими вопросами, было бы неправильно утаить от читателя эту проблему. Мы еще вернемся к ней в § 14.

При рассмотрении системы аксиом может возникнуть и такой вопрос: все ли аксиомы системы являются необходимыми? Ведь если какая-то аксиома вытекает из других, то ее можно удалить без ущерба для рассматриваемой теории; выражение «без ущерба» означает, что совокупность теорем при этом не уменьшится, а останется прежней. Действительно, в теории, основанной на сокращенном списке аксиом, эта удаленная аксиома сделается теоремой (поскольку она вытекает из аксиом сокращенного списка) и тем самым право ссылаться на нее в доказательствах полностью сохраняется.

Аксиома называется **независимой** от остальных аксиом системы, если она не является *следствием* этих остальных аксиом. Предыдущая фраза требует, чтобы мы разъяснили термин *следствие.*

Термин *следствие* употребляется в математике в двух контекстах, приводящих к двум различным смыслам этого термина. Первый контекст: *следствие теоремы.* Второй контекст *следствие аксиом.*

Когда говорят, что какое-то утверждение является следствием какой-то теоремы, то имеют в виде следующее: это утверждение сравнительно нетрудно доказать, опираясь на эту теорему. Тем самым понятие ‘следствие теоремы’ настолько же расплывчато, насколько расплывчато понятие ‘нетрудно доказать’. Когда говорят, что какое-то утверждение является следствием каких-то аксиом, то имеют в виду другое и при том нечто совершенно точное.

Утверждение называется **следствием** некоторых аксиом, если оно выполняется во всякой модели этих аксиом. Например, утверждение «любые две плоскости, имеющие общую точку, пересекаются по прямой» является следствием аксиом связи: оно выполнено во всякой модели этих аксиом. Равным образом следствием аксиом связи является любая из теорем предыдущего параграфа. В сделанном выше Важном Замечании мы отметили, что утверждение каждой из этих теорем выполняется в геометрии тетраэдра; но это же справедливо и для любой вообще модели аксиом связи. Разумеется, к числу следствий какой-то системы аксиом относится и любая аксиома из этой системы. В частности, в любой модели аксиом связи имеется не менее четырех точек (аксиома I.8). А вот утверждение «существует не менее пяти точек» не является следствием аксиом связи, потому что возможна модель (а именно, геометрия тетраэдра), в которой общее число точек равно четырем.

Таким образом, *независимость какой-либо аксиомы от остальных аксиом означает, что существует такая модель, в которой эта аксиома не выполняется, в то время как все остальные аксиомы выполняются.* (Следовательно, модель, о которой здесь идет речь, является моделью для системы всех остальных аксиом.)

Каждая из аксиом связи независима от остальных аксиом этой группы. Проверим, для примера, независимость первой и последней аксиомы. Начнем с последней.

Что мы должны сделать, чтобы убедиться в независимости аксиомы I.8? Мы должны обнаружить, что она не является следствием остальных аксиом, т. е. системы аксиом I.1–I.7. А что мы должны сделать для этого? Мы должны предъявить такую модель системы аксиом I.1–I.7, в которой аксиома I.8 не выполняется. Вот эта модель. Она состоит из трех точек A, B, C, трех прямых p, q, r и одной плоскости, которой принадлежат все точки. Что же касается отношения принадлежности точки к прямой, то оно таково: прямая p проходит через точки B и C, прямая q проходит через точки A и C, прямая r проходит через точки A и B. Читатель легко проверит, что каждая из аксиом I.1–I.7 действительно выполняется в этой модели, а I.8 не выполняется.

На примере построенной только что модели мы можем усмотреть важную связь понятия независимости с понятием непротиворечивости. В самом деле, в нашей модели аксиома I.8 не выполняется, а выполняется противоположная ей аксиома анти-I.8: «Всякие четыре точки лежат на одной и той же плоскости». Таким образом, предложенная конструкция является моделью для такой системы аксиом: I.1–I.7, анти-I.8. Значит, эта система аксиом совместна. Собственно говоря, мы убедились в независимости аксиомы I.8 от аксиом I.1–I.7 именно путем обнаружения совместности системы аксиом I.1–I.7, анти-I.8. (Кстати, аксиома анти-I.8 не такая уж искусственная, как это могло бы показаться. Именно она выполняется в планиметрии.)

Покажем теперь независимость аксиомы I.1. Построим модель, демонстрирующую эту независимость. С этой целью добавим к геометрии тетраэдра еще одну прямую w и объявим, что этой прямой принадлежат точки B и C. В этой расширенной системе из 15 объектов будут выполнены все аксиомы I.2–I.8, так что у нас получилась модель этих аксиом. Однако аксиома I.1 здесь выполнена не будет: через точки B и C теперь проходят две различные прямые, p и w. Значит, аксиома I.1 не является следствием аксиом I.2–I.8, что мы и намеревались обнаружить.

Как и в случае предыдущей модели, ход наших рассуждений был таков. Мы заменили исследуемую на независимость аксиому на противоположную ей аксиому анти-I.1: «существуют две точки, через которые не проходит одна и только одна прямая (это значит, что через них либо вовсе не проходит никакой прямой, либо проходит более одной прямой)». А затем показали совместность системы, состоящей из аксиомы анти-I.1 и аксиом I.2–I.8. Тем самым и была обнаружена независимость интересовавшей нас аксиомы I.1.

Аналогичную проверку независимости — путем построения соответствующих моделей — можно провести и для других аксиом связи, да и для всех вообще аксиом Гильберта. И тем самым убедиться в том, что все аксиомы геометрии системы Гильберта являются независимыми.

Термин «независимость» применяется не только к отдельным аксиомам, но и к системе аксиом в целом. Именно, **независимой** называют такую систему аксиом, в которой каждая аксиома является независимой от остальных аксиом той же системы. Теперь сообщение, сделанное в предыдущем абзаце, можно сформулировать так:

Аксиомы Гильберта образуют независимую систему аксиом.

Понятие независимости системы аксиом — это, конечно, важное математическое понятие, но все же далеко не такое важное, как понятие непротиворечивости. Если система аксиом непротиворечива, то она может привести к плодотворной теории, даже если она не является независимой. Некоторые считают, что потребность в независимости вызвана прежде всего эстетическими соображениями: мол, система аксиом, в которой никакая аксиома не вытекает из остальных, кажется более изящной. Другие исходят из соображений экономии: зачем, дескать, писать лишнюю аксиому. Впрочем, если говорить об экономии бумаги, то таковой не происходит: будет израсходовано меньше бумаги, если, скажем, не выписывать доказательств теорем 7, 8 и 9 из §7, а объявить эти теоремы аксиомами. (Вообще, «лишняя» — т. е. вытекающая из других аксиом — аксиома никогда не приносит вреда, а с педагогической точки зрения может оказаться даже полезной.)

На самом же деле главным фактором, вызывающим интерес к понятию независимости, служит связь этого понятия с понятием совместности. Эта связь уже проявилась выше при исследовании независимости аксиом I.1 и I.8. Закрепим ее в виде следующей теоремы логики:

Пусть S — некоторая система аксиом, а **A** *— некоторая аксиома этой системы. Пусть S^* — система аксиом, получающаяся из S заменой в ней аксиомы* **A** *на противоположную ей (т. е. утверждающую, что* **A** *не имеет места) аксиому анти-***A**. *Аксиома* **A** *тогда и только тогда независима от остальных аксиом системы S, когда система S^* совместна.*

Доказательство. Независимость аксиомы **A** от остальных аксиом означает, что она не является следствием этих остальных аксиом. А это означает, что существует такая модель этих остальных аксиом, в которой **A** не выполняется. Утверждение, что в модели не выполняется **A**, равносильно утверждению, что в модели выполняется анти-**A**. Итак, независимость аксиомы **A** означает, что существует модель, в которой выполняются все остальные аксиомы плюс аксиома анти-**A**, т. е. модель системы S^*.

Выше мы сказали, что все аксиомы геометрии независимы. В частности, независима знаменитая аксиома о параллельных. А это значит, что совместна система аксиом, получающаяся из стандартной системы аксиом геометрии путем замены аксиомы о параллельных на противоположное этой аксиоме утверждение. Эта замена приводит к *геометрии Лобачевского*, который мы посвятим специальный 10-й параграф.

§ 6. Следствия системы аксиом и теоремы аксиоматической теории. Формальные и неформальные аксиоматические теории

Вот перед нами какая-то система аксиом. И вот оказалось, что какая-то аксиома **A** этой системы не является независимой от остальных. Это значит, что аксиома **A** *есть следствие других аксиом*. Кажется очевидным, что мы ничего не потеряем, если вычеркнем эту аксиому из списка аксиом. Ведь если **A** есть следствие других аксиом, она вытекает из этих аксиом и достаточно вспомнить, что было сказано по этому поводу в предыдущем параграфе: «...если какая-то аксиома вытекает из других, то ее можно удалить без ущерба для рассматриваемой теории». И далее предлагалось краткое обоснование этого вывода. Обоснование заключалось в том, что раз некоторое утверждение вытекает из каких-то аксиом, то оно является теоремой той аксиоматической теории, в основу которой и положены эти аксиомы. Так ли это? Настало время поговорить и на эту непростую тему.

В предыдущем абзаце встретилось слово «вытекает». Это слово привычно для математических текстов, оно часто в них встречается, но почти никогда не разъясняется. Не разъясняли его и мы, считая очевидным. Анализируя предыдущий абзац, внимательный читатель заметит, что изложенный в нем ход мысли был таков: сперва мы заявили, что *следствие каких-то аксиом вытекает* из этих аксиом, а затем заявили, что если какое-то утверждение *вытекает* из каких-то аксиом, то оно является теоремой, построенной на основе этих аксиом теории. Короче: если является следствием, то вытекает, а если вытекает, то является теоремой. Слово «вытекает» остается здесь несколько расплывчатым; оно приобретет точный смысл, если мы объявим его либо синонимом выражения «является следствием», либо синонимом выражения «является теоремой». В обоих случаях само слово «вытекает» делается ненужным, а оба наши заявления сливаются в одно: «если некоторое утверждение является следствием некоторых аксиом, то оно является теоремой той аксиоматической теории, которая строится на основе этих аксиом». Вот это-то последнее заявление мы и подвергнем критическому обсуждению.

Что значит, что какое-то утверждение **B** является **следствием** аксиом S? Это значит, что оно выполняется во всякой модели аксиом S. А что значит, что какое-то утверждение является **теоремой** аксиоматической теории, основанной на аксиомах системы S? Это значит, что его можно доказать с помощью этих аксиом, т. е. получить чисто логически, путем опирающегося на эти аксиомы и только на них *доказательства.* Что же касается термина *доказательство,* то доказательство — это не что иное, как чрезвычайно убедительное рассуждение (которое должно убедить нас настолько, что мы делаемся готовы, используя это же самое рассуждение, убеждать других). В частности, каждая аксиома тоже является теоремой: ее доказательство состоит в заявлении, что это аксиома. (Это несколько непривычно для нашего уха и глаза, но дело обстоит именно так: *аксиома есть частный случай теоремы.*)

Давайте еще раз осознаем, истины какого рода мы доказываем в рамках той или иной аксиоматической теории, исходя из аксиом этой теории. Скажем, в теореме 1 мы доказали некий факт про точки, прямые и отношение принадлежности точки к прямой, а в теореме 4 — некий факт про точки, плоскости и отношение принадлежности точки к плоскости. Что значит, что мы доказали эти факты, исходя из аксиом, или опираясь на аксиомы, или в рамках аксиоматической теории (это все одно и то же) и т. п.? Это значит, что мы доказали следующее: эти факты непременно имеют место, если только выполняются аксиомы. Иными словами, мы доказали справедливость этих фактов для любой совокупности точек, прямых, плоскостей и двух отношений принадлежности, удовлетворяющих аксиомам, т. е. для любой модели наших аксиом. Иными словами, мы доказали, что утверждения теорем 1 и 4 являются следствиями системы аксиом. Сделанный только что комментарий имеет совершенно общий характер: всякий раз, когда мы, исходя из аксиом, доказываем какое-либо утверждение, мы доказываем следующее: *доказываемое утверждение является следствием системы аксиом.*

Ясно поэтому, что если какое-то утверждение является теоремой какой-то аксиоматической теории, то оно является и следствием аксиом этой теории: если нам удалось логически вывести это утверждение из аксиом, мы можем быть уверены, что оно будет выполняться во всякой модели этих аксиом (именно это, по существу, и было отмечено в Важном Замечании предыдущего параграфа).

Итак, *всякая теорема аксиоматической теории является следствием системы аксиом этой теории.* А вот обратное заявление («всякое следствие системы аксиом является теоремой, соответствующей аксиоматической теории») вызывает сомнения. Почему, в самом деле, если некое утверждение является следствием каких-то аксиом (т. е. выполняется во всякой модели этих аксиом), оно непременно является те оремой, т. е. допускает опирающееся на эти аксиомы доказательство? В более общем виде это есть вопрос о соотношении между истинностью и доказуемостью: всякая ли истина может быть доказана? Вопрос этот очень сложен и в своем полном объеме находится, по-видимому, за пределами возможностей современной науки.

Для важного класса аксиоматических теорий, однако, этот вопрос решен и притом решен положительно. Именно, если рассматривать только такие аксиомы и такие следствия, которые могут быть записаны на так называемых *элементарных языках* (называемых также *языками первого порядка*), то всякое следствие аксиом допускает доказательство. Это утверждение составляет содержание одной из замечательнейших теорем математической логики (см. ниже) — *теоремы Гёделя о полноте*, установленной великим австрийским логиком и математиком Куртом Гёделем в 1930 г. У нас нет здесь возможности дать определение того, что следует понимать под элементарными языками. Скажем только, что на элементарном языке записываются все аксиомы геометрии из наших §§ 4, 7, 8 и 10, так что все элементарные же (т. е. также записываемые на элементарном языке) следствия этих аксиом могут быть доказаны как теоремы геометрии. На элементарных языках записываются и аксиомы эквивалентности из § 11, аксиомы предшествования из § 12, аксиомы коммутативного кольца и аксиомы поля из § 13, аксиомы линейно упорядоченного поля из § 14 — так что и в этих аксиоматических теориях все элементарные следствия могут быть доказаны, исходя из аксиом.

Напротив, язык аксиом непрерывности из § 9 и аксиом поля действительных чисел из § 14 не является элементарным; как говорят, он является языком высшего порядка. Поэтому теорема Гёделя о полноте не применима к этим системам аксиом. Тем не менее, уже не в силу теоремы Гёделя, а по другим причинам, всякое элементарное следствие каждой из этих систем все же может быть доказано в качестве теоремы.

Разумеется, сам по себе вопрос о соотношении между понятиями ‘следствие системы аксиом’ и ‘теорема аксиоматической теории’ требует значительных уточнений.

Прежде всего, как мы только что видели, уточнений требует сам язык, на котором записываются формулировки аксиом и теорем. Проблемы, связанные с языком, обычно непросты, и мы не в состоянии здесь их касаться. Ограничимся поэтому очень маленьким, но зато наглядным примером, иллюстрирующим эту непростую тему. Возьмем такое предложение: «Диагонали параллелограмма, пересекаясь, делятся пополам». Что здесь утверждается о диагоналях параллелограмма? То́, что они пересекаются и, кроме того, точкой пересечения делятся пополам? Или же то́, что они делятся пополам только в том случае, если они действительно пересекаются? Нам кажется несущественной эта разница, поскольку для нас очевидно, что диагонали параллелограмма, конечно же, пересекаются. Но если рассматривать геометрию как аксиоматическую теорию, то смысл утверждения не должен зависеть от геометрической наглядности. (А попробуйте-ка, кстати, доказать, что диагонали параллелограмма пересекаются!) Задачей построения точно описываемых, так называемых *формализованных*, языков для записи математических утверждений (в частности, аксиом и теорем аксиоматических теорий) занимается особый раздел математики — *математическая логика*. Когда мы говорим о «точно описываемых» языках, мы имеем в виду вот что. Для обычного, естественного языка не существует строгих правил, позволяющих выделять грамматически правильные предложения среди всех цепочек, составленных из букв, знаков препинания и междусловных пробелов; да, к тому же, и люди могут расходиться в оценке правильности того или иного предложения. А вот, скажем, для языков программирования или для шахматной нотации (т. е. специального языка для записи шахматных партий) такие правила могут быть указаны; поэтому эти языки служат примерами формализованных языков.

Далее, уточнений требует наше расплывчатое представление о том, что такое доказательство. Если мы хотим сделать понятие ‘доказательство’ предметом математического исследования, мы должны придать этому понятию точный смысл. Этим опять-таки занимается математическая логика. Итак, предположим, что мы каким-то образом, во-первых, точно описали некоторый формализованный язык и, тем самым, точно определили, что такое предложение этого языка, и, во-вторых, точно определили, что такое доказательство. Тогда автоматически получает точное определение и понятие теоремы: теорема — это такое предложение, которое имеет доказательство.

Если аксиоматическая теория строится на основе некоторого формализованного языка для записи ее утверждений, а понятие доказательства (а с ним и понятие теоремы) получает точное математическое определение, то так развивающуюся аксиоматическую теорию называют **формальной**. Здесь мы не привели ни одного примера такой теории (это было бы крайне затруднительно), а только сказали, что такие бывают и изучаются в математической логике.

Если же не предлагается ни формализованный язык для записи утверждений аксиоматической теории (в частности, ее аксиом и теорем), ни точное математическое определение понятия доказательства (которое, таким образом, остается психологическим), то так развивающуюся аксиоматическую теорию называют **неформальной**. Та аксиоматическая теория геометрии, которая излагается в этой главе, как раз и представляет собой пример неформальной аксиоматической теории.

Соответственно, способ построения математических теорий в виде формальных аксиоматических теорий есть **формальный аксиоматический метод**. Этот метод образует один из главных предметов изучения математической логики. А способ построения математических теорий в виде неформальных аксиоматических теорий есть **неформальный аксиоматический метод**. Этот метод и составляет предмет изложения данной книги.

§ 7. Вторая группа аксиом Гильберта: аксиомы порядка

Вернемся на минуту к традиционным представлениям о прямых и точках (мы не отказываемся от этих представлений, хотя признаем, что они несколько расплывчаты и потому нуждаются в уточнении). Если на какой-то прямой взять три различные точки, то одна из них непременно окажется **между** двумя другими; такую точку будем называть *промежуточной* по отношению к остальным двум. Таким образом, возникает отношение 'лежать между', а короче просто 'между', связывающее между собою тройки точек. При этом точки тройки надо брать в определенном порядке: ведь недостаточно просто сказать, что точки A, B, C связаны между собой отношением 'между', а надо еще указать, какая именно точка между какими находится. Даже те две точки, между которыми находится третья, надо брать в определенном порядке (см. ниже Комментарий после аксиомы II.3). Ведь всего для трех названных точек мыслимы шесть возможностей: 1) A между B и C; 2) A между C и B; 3) B между A и C; 4) B между C и A; 5) C между A и B; 6) C между B и A.

Свойства отношения 'между' сообщаются в следующей, второй по классификации Гильберта, группе аксиом геометрии. Поскольку отношение 'между' описывает взаимное расположение точек прямой, аксиомы этой группы называются *аксиомами порядка*. Это аксиомы II.5–II.6.

Аксиома II.1. *Если точка B лежит между точками A и C, то все три точки A, B, C различны.*

Комментарий. Стало быть, невозможно, чтобы точка B лежала между точками A и A, или чтобы точка A лежала между точками A и B и т. п. Да ясно же, что это невозможно! — воскликнет тут иной читатель, — неужели нужно тратить целую аксиому на такую очевидность? На это мы возразим, что главная черта аксиоматического метода в геометрии как раз в том и состоит, что в доказательствах запрещается ссылаться на наглядные пространственные представления, а разрешается ссылаться только на те свойства отношения 'между' (и других отношений), которые явно записаны в аксиомах. Другое дело, что записанные в аксиомах свойства отношения 'между' должны отражать привычные нам представления о взаимном расположении точек на прямой. Говоря формально, с чисто юридической точки зрения, мы были бы вправе написать вместо аксиомы II.1 такую, например, аксиому: всякая точка A находится между точкой A и точкой A. Но тогда выходило бы, что отношение 'между', описываемое аксиомами, отражает не свойства знакомого всем наглядного понятия 'между', а нечто совсем другое. Мы же хотим описать аксиоматически, т. е. путем выписывания основных свойств, именно это наглядное понятие 'между'.

Аксиома II.2. *Если точка B лежит между точками A и C, то все три точки A, B, C лежат на одной прямой.*

Комментарий. Эта аксиома показывает, что к точкам, не лежащих на одной прямой, отношение 'между' не имеет места.

Аксиома II.3. *Если точка B лежит между точками A и C, то B лежит также между точками C и A.*

Комментарий. Не надо думать, что отмеченная в этой аксиоме симметричность выполнятся автоматически и потому не нуждается в утверждающей ее аксиоме. Говоря об исторических датах, придадим, например, такой смысл выражению «дата B находится между датами A и C»: B встречается в календаре позже, чем A, но раньше, чем C. При таком понимании из того, что B находится между A и C, не следует, что B находится между C и A.

Аксиома II.4. *Для любых двух различных точек A и B существует такая точка C, что B лежит между A и C.*

Теорема 7. На каждой прямой лежит не менее трех точек.

Доказательство. Для интересующей нас прямой p сначала, по аксиоме I.2, находим две различные принадлежащие ей точки A и B. К этим точкам применяем аксиому II.4 и находим точку C с указанным в этой аксиоме качеством. Поскольку B лежит между A и C, то все три точки различны (аксиома II.1) и лежат на одной прямой (аксиома II.2) — на той единственной (по аксиоме I.1) прямой, которая проходит через A и B, а это и есть наша p.

Комментарий. На первый взгляд может показаться, что тем же способом можно найти на прямой p целых четыре точки. Действительно, если применить аксиому II.4 к точкам B и C, то возникнет четвертая точка D, такая что C лежит между B и D. Однако ничто не мешает этой точке D совпасть с нашей первой точкой A. И действительно, прямая, на которой имеется ровно три точки, причем каждая из них объявлена лежащей между двумя другими, образует модель для аксиом II.1–II.4. Однако уже следующая аксиома порядка делает такую трехточечную модель невозможной.

Аксиома II.5. Аксиома единственности промежуточной точки. *Среди любых трех точек существует не более одной, лежащей между двумя остальными.*

Комментарий. Обратим внимание читателя, что аксиома утверждает не существование промежуточной точки (таковой и не будет, если рассматриваемые три точки не лежат на одной прямой), а только то́, что промежуточных точек не может быть более одной. Как только в систему аксиом включается аксиома единственности промежуточной точки, трехточечная прямая из комментария к предыдущей аксиоме перестает быть моделью: ведь там любая из трех точек прямой является промежуточной (а иначе и быть не может в силу аксиомы II.4). Для системы аксиом II.1–II.5 можно предложить такую модель: в качестве прямой берется обычная окружность, а на ней — четыре различные точки; каждая точка объявляется промежуточной по отношению к двум своим соседям.

Аксиома II.6. Аксиома Па́ша (Мориц Паш — немецкий математик, открывший в 1882 г. эту аксиому). *Пусть три точки A, B, C не лежат на одной прямой. Пусть прямая p принадлежит плоскости, проходящей через эти точки, не проходит ни через одну из этих точек, но проходит через какую-то точку, лежащую между A и B. Тогда эта прямая непременно проходит и через какую-то точку, лежащую либо между B и C, либо между A и C.*

Комментарий. Наглядная геометрическая формулировка такова: прямая, расположенная в плоскости треугольника и пересекающая одну из сторон этого треугольника, непременно пересекает и какую-то другую сторону.

Аксиома Паша — последняя в группе аксиома порядка. (Читатель должен понимать условность слова «последняя». Разумеется, порядок, в котором выписываются аксиомы той или иной группы, совершенно условен. Достаточно условно и само деление списка аксиом на группы.) С ее помощью доказывается ряд важнейших свойств, которым подчинено расположение точек на прямой — в частности, формулируемые ниже теоремы 8, 9, 10, 11.

Теорема 8. Если три различные точки лежат на одной прямой, то по крайней мере одна из них лежит между двумя другими.

Комментарий. Заметим, что формулировка теоремы не запрещает, чтобы промежуточных точек было две (а то и три!) — скажем, чтобы из трех точек A, B, C и точка A лежала между точками B и C, и точка C лежала между точками A и B. Это запрещается аксиомой II.5. Доказательства теоремы 8 мы приводить не будем, опасаясь переутомить читателя. Повторим только, что оно опирается на аксиому Паша.

С наглядной геометрической точки зрения то утверждение, которое сформулировано в теореме 8, совершенно очевидно. Почему бы не принять его за аксиому? Чем оно хуже тех утверждений, которые были только что сформулированы в качестве аксиом порядка? Отвечаем: ничем не хуже. И можно принять его за новую аксиому II.9. Но тогда получится, что наша система аксиом перестанет быть независимой: ведь окажется, что одну из ее аксиом, а именно II.9, можно вывести из остальных аксиом — посредством того рассуждения, которое и составляет опущенное нами доказательство теоремы 8. Мы же стремимся к независимости аксиом, чтобы показать читателю, как из очень небольшого числа тех основных свойств неопределяемых понятий, которые заявлены в аксиомах, можно вывести остальные свойства этих понятий. Все сказанное только что о теореме 8 можно повторить и в отношении теоремы 9. Разница лишь в том, что доказательство этой теоремы, сравнительно длинное и «занудное», мы приведем полностью. Тем самым мы дадим читателю реальную возможность почувствовать, как аксиоматический метод работает на практике, как реально осуществляется — в рамках этого метода — получение теорем из аксиом.

Теорема 9. *Для любых двух различных точек A и C существует точка X, лежащая между A и C.*

План доказательства. Для удобства восприятия доказательства, мы сперва объявим его план, а уже потом приведем и само доказательство. Доказательство разобьем на пять этапов.

Этап первый. Находим такую точку E, что A, C, E не лежат на одной прямой.

Этап второй. Находим такую точку B, что E лежит между A и B.

Этап третий. Находим такую точку F, что C лежит между B и F.

Этап четвертый. Находим прямую p, проходящую через E и F.

Этап пятый. Находим точку X, принадлежащую как прямой p, так и прямой, проходящей через точки A и C; эта точка и будет искомой.

Комментарий. Точка F, требующаяся на третьем этапе, может существовать лишь при условии, что точки B и C различны. Значит, предварительно необходимо убедиться, что это условие выполнено: только тогда третий этап будет обоснован. Подобные обоснования требуются для каждого этапа. Полное доказательство как раз и состоит в обосновании всех этапов нашего плана.

Доказательство теоремы 9.

Этап первый. По теореме 3 для наших точек A и C находим такую точку E, что A, C, E не лежат на одной прямой.

Этап второй. Применяя к точкам A и E аксиому II.4, находим такую точку B, что E лежит между A и B. По аксиоме II.2 точки A, E и B лежат на одной прямой. Обозначим эту прямую через q. Прямая q не проходит через C, так как в противном случае точки A, C, E оказались бы лежащими на одной прямой (а именно, на q). Поскольку q проходит через B и не проходит через C, то точки B и C различны.

Этап третий. Применяя аксиому II.4 к B и C, находим такую точку F, что C лежит между B и F. По аксиоме II.2 точки B, C и F лежат на одной прямой. Обозначим эту прямую через r. Так как r проходит через C, а q — нет, то прямые q и r различны. Поскольку прямые q и r различны, а точка B принадлежит им обеим, то, по теореме 1, других общих точек у этих прямых нет. Из аксиомы II.1 вытекает, что каждая из точек E и F отлична от точки B. Поэтому точка F не лежит на прямой q: в противном случае эта лежащая на r точка была бы еще одной, помимо точки B, общей точкой прямых q и r, что невозможно. По аналогичной причине E не лежит на r: в противном случае эта лежащая на q, но отличная от B точка была бы общей для прямых p и q. Итак, q проходит через E, но не через F, а r проходит через F, но не через E; поэтому $E \neq F$.

Этап четвертый. По аксиоме I.1 находим единственную прямую p, проходящую через E и F. Убедимся, что мы находимся в ситуации, описанной в первых двух фразах аксиомы Паша, после слова «пусть».

1. Во-первых, точки A, B, C не лежат на одной прямой. Действительно, из аксиомы II.1 следует, что $A \neq B$. Следовательно, в силу аксиомы I.1, q — это единственная прямая, проходящая через A и B. На втором этапе мы пришли к заключению, что $B \neq C$. Следовательно, в силу аксиомы I.1, r — это единственная прямая, проходящая через B и C. Но мы видели выше, на третьем этапе, что $q \neq r$.

2. Во-вторых, p принадлежит той плоскости π, которая, в силу аксиомы I.4, проходит через точки A, B, C. Действительно, в силу аксиомы I.6* прямые q и r лежат на π; по определению, это означает, что все принадлежащие им точки лежат на π. Следовательно, E и F лежат на π. Еще одно применение аксиомы I.6* показывает, что проходящая через E и F прямая p лежит на π.

3. В-третьих, p не проходит ни через одну из точек A, B, C. Действительно, на третьем этапе мы убедились, что q не проходит через F, а r не проходит через E. Поэтому прямая p отлична и от q, и от r. Если бы прямая p проходила через A, то она должна была бы совпадать с q — той единственной, по аксиоме I.1, прямой, которая проходит через A и E (заметим, что различие точек A и E гарантируется аксиомой II.1); но этого не может быть, так как $p \neq q$. Если бы p проходила через B, то она опять-таки совпадала бы с q как с единственной (аксиома I.1) прямой, проходящей через две различные (аксиома II.1) точки E и B. Наконец, если бы p проходила через C, то она совпадала бы с единственной (аксиома I.1) прямой r, проходящей через различные (аксиома II.1) точки F и C; однако, как мы знаем, $p \neq r$.

4. Наконец, в-четвертых, прямая p проходит через некоторую точку, лежащую между A и B, а именно через точку E.

Этап пятый. Итак, все четыре условия, при которых может быть применена аксиома Паша, выполнены. Применяя ее, находим на прямой p точку X, лежащую либо между B и C, либо между A и C. Для завершения доказательства теоремы покажем, что из этих двух вариантов имеет место второй, т. е. что эта точка X лежит между A и C. А для этого докажем, что первый вариант невозможен, т. е. что точка X не может лежать между B и C. Доказательство невозможности проводим от противного. Итак, предположим, что X лежит между

B и C. Тогда, по аксиоме II.2, все три точки B, X, C лежат на одной прямой. На втором этапе мы убедились, что точки B и C различны, а на третьем — нашли прямую r, проходящую через эти две точки. По аксиоме I.1 эта прямая единственна; значит, если точки B, X, C лежат на одной прямой, то этой прямой может быть только r. Таким образом, X лежит на r. С другой стороны, X лежит на p. Прямые p и r, как мы видели (в п. 3 третьего этапа), различны и вместе с тем проходят через точки F и X; по теореме 1 это может быть в одном единственном случае: когда F и X совпадают. Итак, точка F (она же X) лежит между B и C, и в то же время C лежит между B и F (именно так выбиралась точка F). А это противоречит аксиоме II.5 — аксиоме единственности промежуточной точки. Полученное противоречие показывает, что наше предположение о том, что X лежит между B и C, не может быть истинным, и для X не остается другого выхода, кроме как лежать между точками A и C.

Этим завершается доказательство теоремы 9. Больше у нас таких длинных и утомительных доказательств не будет.

Теорема 10. Между любыми двумя различными точками лежит бесконечно много точек.

Комментарий. Доказательство теоремы кажется очевидным. Возьмем две различные точки A и B и применим к ним только что доказанную теорему 9. Найдем точку X_0, лежащую между ними. Затем, по той же теореме, находим точку X_1 между A и X_0, точку X_2 между A и X_1, точку X_3 между A и X_2 и т. д. Тем самым получаем бесконечное множество точек $\{X_0, X_1, X_2, X_3 \dots\}$, лежащих между точками A и B. Стоп! Вот тут-то нас и подстерегает неприятность. Оказывается, что надо еще доказать два факта:

(1) Все члены последовательности X_0, X_1, X_2, $X_3 \dots$ различны (а аксиома II.3 гарантирует лишь различие соседних членов) и потому множество $\{X_0, X_1, X_2, X_3 \dots\}$ действительно бесконечно.

(2) Все точки этой последовательности лежат между точками A и B.

Надеемся, что читатель уже понимает, что одной геометрической наглядности (делающей оба эти факта очевидными) недостаточно, и оба факта надо доказывать из аксиом (раз уж мы занимаемся аксиоматическим методом). И действительно, оба факта можно доказать, опираясь, в частности, на аксиому Паша. Здесь мы ограничимся этим замечанием и завершать доказательство теоремы 10 не станем.

Теорема 11. *Каковы бы ни были три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, невозможна прямая, которая проходила бы одновременно и через некоторую точку, лежащую между точками A и B, и через некоторую точку, лежащую между точками B и C, и через некоторую точку, лежащую между точками C и A.*

Комментарий. Наглядная геометрическая формулировка такова: никакая прямая не может пересекать все три стороны треугольника.

Доказательство теоремы 11 мы приводить не будем, а заметим следующее. И теорема 11, и аксиома Паша говорят что-то о взаимном расположении точек и прямых на плоскости, в наглядной же интерпретации — о возможном расположении прямой относительно треугольника. И аксиома, и теорема содержат упоминание о точках, не лежащих на одной прямой, т.е. предполагает выход за пределы прямой. Поэтому неудивительно, что в доказательстве теоремы 11 используется аксиома Паша. Удивительно другое, что на эту аксиому опираются теоремы 8, 9 и 10, говорящие лишь о расположении точек, лежащих на одной и той же прямой. Конечно, можно было бы провозгласить, скажем, теоремы 8 и 9 новыми аксиомами — но тогда система аксиом перестала бы быть независимой, потому что, как мы знаем, эти «новые аксиомы» являются следствиями остальных.

Можно, однако, попытаться создать геометрию прямой, не выходя за ее, прямой, пределы. Читатель может попробовать самостоятельно выписать аксиомы для такой «линейной геометрии», взяв в качестве исходных два неопределяемых понятия: **точка** и **лежать между**. По аналогии с терминами «стереометрия» и «планиметрия», эту «линейную геометрию» можно было бы назвать **линеометрией**. Предоставляем читателю поразмышлять на тему о том, какие еще аксиомы следует добавить к аксиомам II.4–II.5, чтобы получить аксиоматику линеометрии. А заодно поразмышлять вот о чем. Излагаемая в этой главе аксиоматика геометрии есть аксиоматика стереометрии. *Стереометрия*, как известно, изучает свойства пространственных фигур — в отличие от *планиметрии*, изучающей свойства фигур, расположенных в одной плоскости. Приглашаем читателя понять, что надо сделать с нашей аксиоматикой, как ее изменить, чтобы превратить ее в аксиоматику планиметрии. В §5 мы видели, что аксиома I.8 заменяется при этом на аксиому анти-I.8. Но проще, конечно, вовсе исключить понятие плоскости из числа исходных понятий. Тогда и аксиома анти-I.8 не понадобится.

Однако ряд аксиом придется отредактировать, удалив из них какое бы то ни было упоминание о плоскостях.

И в заключение этого параграфа — эпизод из истории отечественной математики. Весной 1947 г. Роланд Львович Добрушин, впоследствии выдающийся российский математик, был еще школьником десятого (в те времена — выпускного) класса и в качестве такового участвовал в X Московской математической олимпиаде. При решении одной из олимпиадных задач ему потребовался некоторый геометрический факт, в справедливости которого он не сомневался, но не мог его доказать. Этот факт составлял содержание аксиомы Паша. Так вспоминают одни свидетели. Другие же утверждают, что факт, о котором идет речь, составлял содержание нашей теоремы 11 (которая, как мы отмечали, опирается на аксиому Паша). Но в памяти и тех, и других одинаково сохранился тот текст, который написал Добрушин в своей олимпиадной письменной работе: «Я не могу это доказать, потому что, к стыду своему, не знаю, что такое прямая».

§ 8. Дальнейшие аксиомы геометрии: аксиомы конгруэнтности

Дальнейшие аксиомы системы Гильберта разбиваются по традиции на три группы: аксиомы конгруэ́нтности, аксиомы непрерывности и аксиома о параллельных, которая выделяется в особую группу. Историческая традиция вступает здесь в конфликт с логикой: читатель увидит, что с точки зрения логики аксиому о параллельных следовало бы отнести к аксиомам связи, а вместо одной группы аксиом конгруэнтности следовало бы иметь две отдельные группы. (При этом надо понимать, что деление аксиом на группы сделано лишь для удобства изложения и никак не влияет на состав теорем аксиоматической теории.) Мы, однако, будем следовать традиции.

С аксиомами этих трех групп связаны определенные сложности — своя для каждой из групп. Для аксиом конгруэнтности сложность заключается в том, что в этих аксиомах по необходимости участвуют не только исходные, неопределяемые понятия — как это было в аксиомах связи и аксиомах порядка — но также и понятия производные, определяемые, такие как ‘отрезок’ и ‘луч’, ‘угол’ и ‘полуплоскость’. Сложный характер аксиом непрерывности состоит в том, что в них участвует понятие натурального числа (и даже более сложные понятия). Наконец, аксиома о параллельных менее очевидна, чем остальные аксиомы геометрии; именно с этим ее качеством связаны как многочисленные попытки ее доказать, так и попытки вовсе отказаться от этой аксиомы. Аксиоме о параллельных — самой, пожалуй, знаменитой из всех аксиом геометрии — мы посвятим отдельный параграф. А в этом параграфе поговорим об аксиомах конгруэнтности.

Само слово «конгруэ́нтный» происходит от латинского прилагательного «congruens» (произносится: «ко́нгруэнс») со значением «соответствующий», «согласующийся», «сообразный» и т. п. В геометрии этот термин принят для обозначения равенства отрезков, углов, треугольников и других геометрических фигур. Одно время в отечественных средних школах был принят именно этот ученый термин (и в пользу такого решения есть ряд убедительных доводов), однако сейчас снова вернулись к более короткому и простому термину «равенство». Мы также будем говорить о равенстве фигур, однако для управляющей этим понятием группы аксиом сохраним наименование «аксиомы конгруэнтности».

Аксиомы конгруэнтности разбиваются на две подгруппы. В аксиомах первой подгруппы говорится о свойствах равенства отрезков. В аксиомах второй подгруппы говорится о свойствах равенства углов. (Вот каждую из этих-то подгрупп и следовало бы объявить особой группой аксиом.)

Ни понятие отрезка, ни понятие угла не входят в жесткий список исходных, неопределяемых понятий. Поэтому прежде чем формулировать соответствующие аксиомы мы обязаны их определить. Начнем с отрезков.

Отрезок — это множество, состоящее из каких-либо двух различных точек A и B и всех точек, лежащих между ними; A и B называются *концами* отрезка, а все остальные точки — его *внутренними точками* (про них также говорят, что они лежат *внутри* отрезка). Ясно, что отрезок полностью определяется своими концами. Вместо того, чтобы писать длинно «отрезок с концами A и B», пишут просто AB или BA, так что оба последние обозначения обозначают один и тот же отрезок.

На совокупности всех отрезков задается **отношение равенства отрезков**. Это значит, что некоторые отрезки объявляются равными друг другу. Обычное, «бытовое» понимание равенства отрезков состоит в том, что они имеют одинаковую длину. Но у нас нет понятия длины отрезка (и это понятие довольно сложно, так как предполагает понятие действительного числа). Можно объявить отрезки равными, если они совмещаются при движении, но тогда надо располагать понятием движения. В системе Гильберта отношение равенства отрезков является исходным, неопределяемым отношением. Это значит, что не предлагается никакого реального способа узнавать, какие отрезки равны, а какие нет, а просто свойства этого отношения записываются в аксиомах. Для обозначения того, что два отрезка равны, или конгруэнтны, используется знак «$\equiv$».

Аксиомы конгруэнтности отрезков (III.1–III.3)

Аксиома III.1. *Если $A'B' \equiv AB$ и $A''B'' \equiv AB$, то $A'B' \equiv A''B''$.*

Аксиома III.2. *Пусть точка B лежит между точками A и C, а точка B' лежит между точками A' и C'. Если при этом $AB \equiv A'B'$ и $BC \equiv B'C'$, то $AC \equiv A'C'$.*

Эти две аксиомы не нуждаются в комментариях. А вот следующей аксиоме мы предпошлем разъяснение ее наглядного геометрического смысла. Мы подчеркивали и подчеркиваем, что об отношении конгруэнтности отрезков (как и о других неопределяемых понятиях аксиоматической геометрии) мы ничего не имеем права знать, кроме тех свойств, которые записаны в аксиомах. Однако сами эти свойства мы берем не с потолка, а заимствуем у наглядных геометрических представлений — в данном случае у наглядного, «школьного» представления о равенстве отрезков. (Говоря формально, мы можем записать в аксиомах что угодно: нет никаких юридических препятствий, чтобы мы записали там такие свойства, скажем, отношения равенства, которые взяты именно с потолка. Но тогда возникающая аксиоматическая теория не будет иметь отношения к реальности, ее теоремы не будут отражать свойства того пространства, в котором мы живем.) Так вот, аксиома III.3 отражает следующий наглядный факт: на любой прямой от любой точки и в любую сторону можно отложить отрезок, равный произвольному наперед заданному отрезку.

Аксиома III.3. *Пусть даны отрезок AB, прямая p и на ней две различные точки O и E. Тогда можно найти ровно одну точку X, обладающую двумя свойствами:* 1) *X лежит на p, причем по ту же сторону от O, что и E;* 2) *$AB \equiv OX$.*

Комментарий. Необходимые пояснения к формулировке мы дадим несколькими строками ниже. А пока отметим, что, опираясь на аксиомы III.1 и III.3 (и только на них), можно доказать такой факт (который надо доказывать, коль скоро мы считаем равенство отрезков неопределяемым понятием!): *Если $AB \equiv A'B'$, то $A'B' \equiv AB$.*

В аксиоме III.3 встречается понятие ‘по ту же сторону’. Как это понятие определяется с помощью понятия ‘между’, разъяснялось в середине § 3 — там, где, на примере понятия угла, мы говорили о дефиниционном способе введения новых понятий. Таким образом мы понимаем, что́ значит, что две точки, принадлежащие некоторой прямой, лежат по одну и ту же сторону от третьей точки, принадлежащей той же прямой. И тем самым понимаем формулировку аксиомы III.3.

Пусть p — некоторая прямая и O — некоторая принадлежащая ей точка. Множество всех точек, лежащих на p по одну и ту же сторону от точки O, называется **лучом**, исходящим из O. Стоп! Если читатель согласился с таким определением, то это плохо. Но разве можно не соглашаться с определением? Ведь в определении не сообщается ничего иного, кроме того, что то-то и то-то мы будем называть так-то и так-то. Это серьезный вопрос, и над ним стоит задуматься. Действительно, определения не могут быть истинными или ложными. Но могут быть осмысленными и бессмысленными. Бессмысленным определение оказывается тогда, когда бессмысленно то понятие, название для которого предлагается этим определением. Так вот, осмысленность нашего определения луча под большим вопросом — если, конечно, не исходить из наглядных пространственных представлений, а строго соблюдать «правила игры» с аксиоматическими системами.

Все дело в том, что совершенно неясно, что такое «множество всех точек, лежащих на p по одну и ту же сторону от точки O». Предвидим удивление читателя. Как же так, ведь в § 3 мы определили понятие 'по одну сторону'. Если посмотреть внимательно, что же именно мы там определили, то увидим следующее. Для двух точек X и Y мы действительно определили, что́ значит, что эти две точки лежат по одну и ту же сторону от O. Но из одного только наличия такого определения вовсе не следует, что существует множество всех точек, лежащих по одну и ту же сторону от O. Вот простой пример, поясняющий нашу мысль. Рассмотрим слова русского языка. Условимся говорить, что два слова лежат по одну и ту же сторону, если они имеют хотя бы одну общую букву. А теперь возьмем три слова: «кот», «кит» и «мир». Согласно нашему определению, слова «кот» и «кит» лежат по одну сторону. То же верно про слова «кит» и «мир». Но вот слова «кот» и «мир» не лежат по одну сторону. Поэтому никакого множества слов, лежащих по одну сторону, нет; это понятие просто бессмысленно — несмотря на то́, что *для любых двух слов мы можем сказать*, лежат они по одну сторону или нет.

Как же быть? К счастью, в случае луча, в отличие от только что приведенного примера, дела обстоят гораздо приятнее. Множество точек, лежащих по одну сторону от заданной точки, действительно существует, но это надо доказывать. Справедлива следующая теорема, которую мы назовем Теоремой о существовании луча и доказательство которой мы приводить не будем.

Пусть даны прямая p и точка O, лежащая на этой прямой. Тогда множество всех точек прямой p, отличных от точки O, разбивается на две части, или подмножества, обладающих следующими двумя свойствам: 1) *если две точки принадлежат одной и той же части, то они лежат по одну и ту же сторону от точки O;* 2) *если две точки прямой p лежат по одну сторону от точки O, то они принадлежат одной и той же части.*

Каждая из двух частей, указанных в этой теореме, называется **открытым лучом**, а сама точка O — началом этого открытого луча. Всякий открытый луч с началом в O и есть то самое *множество точек, лежащих по одну и ту же сторону от точки O.* А **луч** определяется как открытый луч с добавленным к нему его началом. Говорят также, что луч *исходит* из своего начала. Про всякую точку, принадлежащую лучу, говорят также, что она *лежит* на этом луче.

Теперь, и только теперь, мы получаем право определить понятие угла. **Угол** есть совокупность двух лучей, имеющих общее начало. Эти лучи называются *сторонами* угла, а их общее начало — *вершиной* угла. Предоставляем читателю самостоятельно дать (точнее, вспомнить) определение *смежных* углов.

На множестве всех углов задается **отношение равенства углов**. Это значит, что некоторые углы объявляются равными друг другу. Отношение равенства углов является исходным, неопределяемым отношением. Это значит, что не предлагается никакого реального способа узнавать, какие углы равны, а какие нет, а просто свойства этого отношения записываются в аксиомах. Для обозначения того, что два угла равны, или конгруэнтны, используется знак «$\equiv$». Как только у нас появляется понятие равенства углов, мы можем дать определение *прямого* угла — в точности по Евклиду (см. выше определение 10 в нашем § 2).

Аксиомы конгруэнтности углов (III.4–III.6)

Аксиома III.4. *Всякий угол равен самому себе.*

Комментарий. Читатель может удивиться, почему аналогичной аксиомы не было для отрезков. Отвечаем: утверждение *Всякий отрезок равен самому себе* можно доказать, исходя из аксиом конгруэнтности отрезков.

Угол, вершиной которого служит точка O, а на сторонах которого лежат точки K и L, обозначается $\angle KOL$ или $\angle LOK$.

Аксиома III.5. *Пусть даны три различные точки A, B, C и три различные точки A', B', C'. Если $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ и $\angle BAC \equiv \equiv \angle B'A'C'$, то $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.*

Комментарий. В школьном курсе геометрии эта аксиома образует один из признаков равенства треугольников («по двум сторонам и углу между ними»).

Угол, образованный двумя лучами h и k, обозначается $\angle(h,k)$ или $\angle(k,h)$.

Аксиома III.6. *Пусть даны четыре объекта:* 1) *угол $\angle(h,k)$, стороны которого не принадлежат одной прямой;* 2) *точка O';* 3) *луч h' с началом в этой точке;* 4) *полуплоскость α, ребру которой принадлежит этот луч. Существует единственный луч k', который обладает тремя свойствами:* 1) *k' имеет своим началом O',* 2) *k' принадлежит полуплоскости α;* 3) *$\angle(h',k') \equiv \angle(h,k)$.*

Комментарий. Рекомендуем читателю сделать здесь остановку и самостоятельно выделить те новые понятия, которые встретились в этой аксиоме. Под новыми понятиями мы понимаем те понятия, которые ни являются исходными (неопределяемыми), ни были нами определены ранее. Когда автор попытался сам выполнить это предложенное читателям задание, у него получился такой список новых понятий: 1) ‘данный луч принадлежит данной прямой’; 2) ‘полуплоскость’; 3) ‘ребро полуплоскости’; 4) ‘данный луч принадлежит данной полуплоскости’. Не пропущено ли здесь что-нибудь? А что значит, что луч принадлежит ребру? Это сделается понятным, когда выяснится, что ребро полуплоскости — это прямая. Наглядный геометрический смысл всех этих понятий очевиден. Определить их через исходные, неопределяемые понятия несложно, и мы предоставляем это сделать читателю. Некоторая трудность возникнет при определении того, что такое полуплоскость. Для этого сначала надо определить, что значит, что две точки *лежат по одну сторону от данной прямой.* Определение довольно очевидно: *Говорят, что точки A и B лежат по одну сторону от прямой p, если A, B и p лежат в одной плоскости и прямая p не имеет общих точек с отрезком AB.* Предоставляем читателю сформулировать Теорему о существовании полуплоскости, аналогичную сформулированной выше Теореме о существовании луча. Эта теорема и даст право ввести в рассмотрение понятие полуплоскости с данным ребром.

Аксиомы конгруэнтности позволяют разместить на прямой точки, соответствующие некоторым числам — а именно, всем целым числам и, более того, всем двоично-рациональным числам (так называются рациональные числа, у которых знаменатель есть степень двойки). Тем самым эти аксиомы позволяют начать построение так называемой *числовой прямой.* С этой целью возьмем на прямой какие-нибудь две точки A_0 и A_1. Пользуясь аксиомой III.3, найдем такую точку A_2, что A_1 лежит между A_0 и A_2 и $A_1A_2 \equiv A_0A_1$. По той же аксиоме найдем точку A_3, такую что A_2 лежит между A_1 и A_3 и $A_2A_3 \equiv A_0A_1$. Продолжая этот процесс, получим последовательность точек A_0, A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_n, \ldots$ Каждая точка A_n лежит между A_{n-1} и A_{n+1}, причем

$$A_{n-1}A_n \equiv A_nA_{n+1} \equiv A_0A_1.$$

Эти точки можно рассматривать как изображения натуральных чисел. По аналогии — по другую сторону от точки A_0 — строятся точки A_{-1}, A_{-2}, A_{-3}, $\ldots$, A_{-n}, $\ldots$, служащие изображениями отрицательных целых чисел. А можно ли построить точку, отвечающую числу полтора? Для этого нужно найти середину отрезка A_1A_2, т. е. такую точку X, что $A_1X \equiv XA_2$. Доказать существование такой точки можно с привлечением аксиом конгруэнтности углов. Действительно, с их помощью можно найти середину любого отрезка (для этого надо сначала найти какой-нибудь параллелограмм, у которого этот отрезок служит диагональю, а тогда искомой серединой будет точка пересечения диагоналей). Так можно получить изображения всех чисел со знаменателем два, а затем со знаменателем четыре и т. д.

§ 9. Аксиомы непрерывности и связанные с ними логические проблемы

Перейдем теперь к аксиомам непрерывности. Таковых две: *аксиома Архимеда*, сформулированная великим древнегреческим ученым Архимедом в III в. до н. э., и *аксиома Кантора*, сформулированная великим немецким математиком Георгом Кантором в 1872 г. Прежде чем дать точные формулировки, объясним неформально их смысл.

Аксиома Архимеда утверждает, что шагая по прямой равномерными шагами, можно рано или поздно перешагнуть через любую точку на этой прямой. Более точно, пусть на прямой лежат две точки, начальная A и финальная B, а наш шаг равен отрезку CD; этот отрезок CD будем откладывать на этой прямой от точки A в сторону точки B; утверждается, что после достаточного числа таких откладываний мы зайдем за точку B (см. рис. 3).

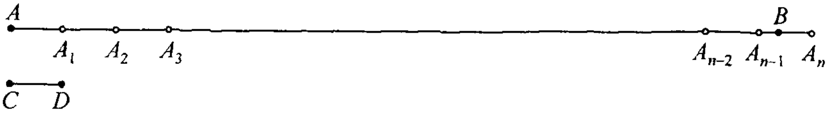


Рис. 3. $AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv A_2A_3 \equiv \ldots \equiv A_{n-2}A_{n-1} \equiv A_{n-1}A_n \equiv CD$

Аксиома Кантора утверждает, что для любой последовательности вложенных друг в друга отрезков найдется точка, лежащая внутри каждого из этих отрезков (см. рис. 4). (В подлинной формулировке Кантора требовалось еще, чтобы длины отрезков стремились к нулю, но можно обойтись и без этого требования.) А теперь — точные формулировки.

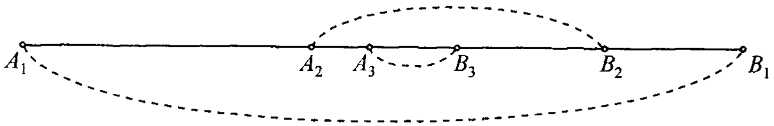


Рис. 4

Аксиома IV.1. А к с и о м а А р х и м е д а. *Пусть AB и CD — произвольные отрезки. Тогда на прямой, проходящей через точки A и B, существует конечное число точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, расположенных следующим образом:*

1) *точка A_1 лежит между точками A и A_2, и далее каждая точка A_i лежит между точками A_{i-1} и A_{i+1};*

2) *отрезок AA_1 и каждый из отрезков $A_{i-1}A_i$ равен отрезку CD;*

3) *точка B лежит между точками A и A_n.*

Возьмем два произвольных отрезка, AB и CD. Разделим отрезок AB пополам, т.е. найдем такую точку X, что $AX \equiv XB$. Полученную половину AX снова разделим пополам и т.д. В «наглядной геометрии» очевидно, что рано или поздно мы получим такой отрезок AW, который будет короче, чем CD (это значит, что он равен некоторому отрезку, оба конца которого лежат внутри CD). Однако доказать этот факт без аксиомы Архимеда невозможно.

Аксиома IV.2. А к с и о м а К а н т о р а. *Пусть дана бесконечная последовательность отрезков $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n, \ldots$, причем концы каждого из отрезков A_kB_k лежат внутри предыдущего отрезка $A_{k-1}B_{k-1}$. Тогда существует точка, лежащая внутри каждого из отрезков последовательности.*

Без аксиомы Кантора невозможно доказать, например, что прямая, отстоящая от центра некоторой окружности менее, чем на ее радиус, непременно пересечет эту окружность.

Множество точек называется *выпуклым*, если для всякого отрезка, оба конца которого принадлежат этому множеству, все его внутренние точки также принадлежат этому множеству. Например, выпуклыми будут следующие множества точек на прямой: 1) множество всех точек прямой; 2) множества, состоящие из одной точки; 3) отрезки; 4) интервалы (*интервалом* называется множество всех внутренних точек какого-либо отрезка); 5) полуинтервалы (*полуинтервалом* называется множество, состоящее из всех внутренних точек и одного из концов какого-либо отрезка); 6) лучи; 7) открытые лучи. Выпуклость всех этих простейших множеств сравнительно нетрудно доказать из аксиом. Аксиом непрерывности при этом не потребуется. Верно и обратное: других линейных (т. е. состоящих из точек одной и той же прямой) непустых выпуклых множеств не бывает. Иными словами всякое непустое выпуклое множество точек на прямой принадлежит одному из семи перечисленных выше типов. Однако этот факт уже невозможно доказать без привлечения аксиом непрерывности.

Мы видим, что аксиомы непрерывности управляют тонкими свойствами расположения точек на прямой. Именно они позволяют ввести в полном объеме понятие числовой прямой, т. е. рассматривать точки прямой как изображения действительных чисел. Однако эти аксиомы поставили перед математиками серьезные логические проблемы. Попытаемся их обсудить — по необходимости вкратце.

Указанные логические проблемы вызваны тем, что в аксиомах непрерывности впервые появилось понятие натурального числа. Как же так, удивится читатель? А разве в аксиоме I.3 (*Существуют три точки, не лежащие на одной и той же прямой*) не участвует число три? Да, ответим мы, в этой аксиоме участвует понятие числа три, но не понятие натурального числа вообще. Да и само число три было употреблено лишь для краткости, его легко избежать. Достаточно следующим образом переписать эту аксиому: *Существуют точки A, B, C, не лежащие на одной и той же прямой.* Таким же образом можно избежать участия в формулировке аксиом и любого другого конкретного — но конкретного! — натурального числа. А вот в формулировках аксиом Архимеда и Кантора участвует несколько загадочное натуральное число n. Конечно, n не обозначает никакого определенного натурального числа, эта буква обозначает произвольное натуральное число; она, как говорят в математической логике, является *переменной*, пробегающей по натуральным числам. (Для сравнения — буквы A, B и C в только что выписанной переформулировке аксиомы I.8 были переменными, пробегающими по точкам.) Так вот, выяснилось, что для аксиом с участием *натуральных* (т. е. пробегающим по натуральным числам) *переменных* тот и без того достаточно сложный вопрос о соотношении истинности и доказуемости, которого мы коснулись в нашем § 6, значительно усложняется. Именно, выяснилось, что при любом уточнении понятия 'доказательство' среди утверждений о натуральных числах неизбежно найдутся такие истинные утверждения, которые невозможно доказать в рамках этого уточнения. Этот замечательный факт составляет содержание знаменитой *теоремы Гёделя о неполноте*, найденной в 1931 г. тем же великим Гёделем, который за год до того установил свою теорему о полноте (см. выше § 6).

Замечание. Есть бросающийся в глаза признак того, что аксиомы непрерывности имеют более сложную логическую природу, нежели предшествующие им аксиомы геометрии: и в формулировке аксиомы Архимеда, и в формулировке аксиомы Кантора используется многоточие. Это многоточие как бы служит сигналом, что мы вынуждены пользоваться оборотом «и так далее», поскольку имеем дело с неопределенным количеством, величина которого нам заранее неизвестна. Конечно, можно придумать (и он придуман) такой язык, чтобы избежать многоточий, но вот натуральной переменной при формулировках аксиом Архимеда и Кантора избежать не удастся. Аксиома Кантора с логической точки зрения устроена еще сложнее, поскольку в ней участвуют не только произвольные натуральные числа (они присутствуют в содержании понятия 'последовательность отрезков'), но и произвольные последовательности отрезков, т. е. функции (потому что последовательность есть функция, заданная на натуральном ряду). Все эти вопросы относятся к компетенции математической логики.

В формулировках аксиом Архимеда и Кантора избавиться от порождающего проблемы понятия натурального числа нельзя. Но, может быть, можно заменить их другими аксиомами? Оказывается, можно. Вместо аксиом Архимеда и Кантора можно написать одну единственную аксиому Дедекинда, сформулированную знаменитым немецким математиком Рихардом Де́декиндом в 1872 г.

Аксиома IV* (Аксиома Дедекинда). *Пусть все лежащие на какой-то прямой точки произвольным образом разбиты на два непересекающихся непустых выпуклых подмножества. Тогда на этой прямой существует точка D со следующим свойством: какой ни взять* *отрезок, внутри которого находится эта точка D, среди внутренних точек этого отрезка найдутся точки как первого, так и второго подмножества.*

Аксиома Дедекинда следует из аксиом Архимеда и Кантора (и остальных аксиом геометрии). Поэтому если в качестве аксиом непрерывности принять аксиомы Архимеда и Кантора (как мы и сделали), аксиома Дедекинда становится теоремой. Можно поступить наоборот. Сохранив остальные аксиомы системы Гильберта, принять в качестве единственной аксиомы непрерывности аксиому Дедекинда; в такой аксиоматической теории теоремами окажутся аксиомы Архимеда и Кантора. Мы располагаем, таким образом, двумя вариантами аксиоматики геометрии: архимедо-канторовский вариант и дедекиндовский вариант. Каждый из этих вариантов приводит к одному и тому же запасу теорем (конечно, в число теорем надлежит, как это делается в высокой науке, включить и аксиомы).

Прекрасно! — воскликнет читатель. Вот мы и избавились от беспокоившего нас понятия натурального числа, да заодно и уменьшили количество аксиом. Оказывается, однако, что логическая природа аксиомы Дедекинда еще сложнее, чем у аксиом Архимеда и Кантора. Дело в том, что в ней говорится о произвольных подмножествах точек прямой. Ведь если записать ее несколько более формально, она будет начинаться так: *Если какое-то подмножество точек прямой выпукло и его дополнение тоже выпукло, то*.... А при совсем формальной записи появится переменная, пробегающая по множествам точек (все это из области математической логики). Но ведь у нас и раньше, а именно в аксиомах конгруэнтности, были множества точек: отрезок — это множество точек, и угол составлен из лучей, а каждый луч является множеством точек. Да, это верно. Но использование в аксиомах конгруэнтности понятия ‘множество точек’ было совершено лишь для удобства изложения, для того лишь, чтобы сделать это изложение более наглядным и кратким. На самом же деле без понятия множества точек в аксиомах конгруэнтности можно обойтись. Эти аксиомы можно переписать так, чтобы из них исчезло понятие множества. Чтобы сказанное не оставалось пустым звуком, поясним вкратце, как это делается.

Отрезок полностью определяется набором своих концов. Вот эту-то пару точек и будем теперь называть отрезком. Более точно, отрезком будем теперь (временно, до конца этого параграфа) называть произвольную упорядоченную пару, составленную из точек A и B. Такой отрезок по-прежнему будем обозначать AB. Все аксиомы конгруэнтности отрезков сохраняются. К этим аксиомам — при таком новом понимании отрезка — надо добавить еще аксиому $AB \equiv BA$ (дело в том, что сама по себе упорядоченная пара, составленная из A и B, не тождественна упорядоченной паре, составленной из B и A).

А угол можно рассматривать как произвольную упорядоченную тройку попарно различных точек A, B, C. В такой тройке точку B назовем вершиной угла, а точки A и C — боковыми точками. Сторона угла определяется как прямая, проходящая через вершину и одну из боковых точек. Такой угол будет обозначаться так: $\angle ABC$. Аксиомы конгруэнтности углов придется переформулировать в новых терминах, а также добавить к ним некоторые новые аксиомы, например, такую:

Если точки A' и C', отличные от точки B, лежат на сторонах угла $\angle ABC$, то $\angle ABC \equiv \angle A'BC'$.

§ 10. Аксиома о параллельных. Евклидова геометрия, геометрия Лобачевского и абсолютная геометрия

Иногда приходится слышать (и даже читать) такое мнение об аксиоме о параллельных и о Н. И. Лобачевском: аксиома о параллельных — это утверждение о том, что через всякую точку, не лежащую на прямой, можно провести другую прямую, параллельную первой; а Лобачевский доказал, что параллельные прямые пересекаются. И то, и другое неверно. Утверждение, что через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную исходной прямой, есть теорема, вытекающая из остальных аксиом геометрии, так что нет нужды провозглашать ее аксиомой; Лобачевский же никак не мог доказать, что параллельные прямые пересекаются: достаточно вспомнить определение параллельности.

Следующая аксиома о параллельных завершает собою систему аксиом Гильберта.

Аксиома V. Аксиома о параллельных. *Через всякую точку, не лежащую на какой-либо прямой p, проходит не более одной прямой, параллельной прямой p.*

Комментарий. Пятый постулат Евклида, приведенный выше в нашем § 2, представляет собой другой вариант аксиомы о параллельных. Оба варианта равносильны в следующем смысле: если выбрать один из вариантов и присоединить его к остальным аксиомам системы

Гильберта, то другой вариант становится теоремой. (Разумеется, предварительно надо будет кое-что определить — в частности, что́ значит, что два угла в сумме меньше двух прямых углов.)

По определению, две прямые **параллельны**, если они лежат в одной плоскости и не существует точки, принадлежащей им обеим. Таким образом, в формулировке аксиомы о параллельных нет ничего, что бы выводило ее за пределы аксиом связи. Как уже отмечалось в начале § 8, ее особое положение в аксиоматике геометрии вызвано тем, что она не столь очевидна, как другие (об аксиомах непрерывности разговор особый, мы не имеем здесь их в виду). Скажем, аксиому I.1 можно подтвердить экспериментально. Если выбрать плоский участок, вбить два колышка и туго натягивать между ними нити, то все эти нити сольются в одну линию — на глаз, конечно, но вся наша проверка и идет «на глаз». А вот убедиться на практике, что проходящая через точку параллельная только одна, невозможно. Представим себе, что мы провели параллельную и, кроме того, через ту же точку какую-то другую прямую. По аксиоме о параллельных эта другая прямая обязана пересечь ту исходную прямую, к которой и была проведена наша параллельная. Но где эта точка? Она ведь может оказаться не только вне участка, доступного нашему обозрению, но и астрономически далеко. И может не оказаться иного способа убедиться в том, что такая точка существует, как просто п о в е р и т ь в аксиому о параллельных. Но такой, основанный на чистой вере, способ подтверждения того факта (а лучше сказать — того предположения, той гипотезы), что аксиома о параллельных выполняется в реальном физическом пространстве, был не по душе математикам.

Поэтому в течение долгого времени предпринимались попытки доказать аксиому о параллельных, исходя из остальных аксиом. Однако все эти попытки проваливались. Как правило, в каждое такое доказательство незаметно проскальзывало какое-нибудь геометрическое утверждение, не вызывающее, казалось бы, никаких сомнений, но на самом деле равносильное аксиоме о параллельных. Например, в «доказательстве» знаменитого французского математика XVIII–XIX вв. Лежандра использовалось такое вроде бы невинное предложение: *через любую точку внутри угла можно провести секущую, пересекающую обе стороны угла.* Оказалось, что это предложение равносильно аксиоме о параллельных.

Словосочетание «предложение, равносильное аксиоме о параллельных» имеет следующий точный смысл: 1) в системе аксиом, включающей аксиому о параллельных, рассматриваемое предложение может быть доказано (т. е. является теоремой); 2) если же из аксиоматики вычеркнуть аксиому о параллельных, а вместо нее вставить рассматриваемое предложение, то, напротив, в этой новой системе аксиом аксиома о параллельных может быть доказана как теорема.

Приведем еще несколько предложений, оказавшихся равносильными аксиоме о параллельных:

1. *Сумма углов всякого треугольника равна удвоенному прямому углу.*

2. *Сумма углов во всяком треугольнике одна и та же.*

3. *Существуют два треугольника, у которых углы попарно равны, а противолежащие этим углам стороны не равны.*

С большим трудом в сознание математиков проникало убеждение, что аксиому о параллельных скорее всего вообще нельзя доказать. Осознать это было трудно еще и потому, что вплоть до самого конца XIX в. какой-либо четкой системы аксиом геометрии вообще не существовало. Для аксиомы о параллельных решающим оказалось третье десятилетие XIX в. В этот период два великих геометра — российский математик Николай Иванович Лобачéвский и венгерский математик Я́нош Бóйаи (по русски часто пишется как «Больяй») — совершенно независимо друг от друга построили геометрическую теорию, основанную на отрицании аксиомы о параллельных. Эту теорию называют *геометрией Лобачевского–Бóйаи* или же просто **геометрией Лобачевского**. Первые публикации по геометрии Лобачевского принадлежат ее авторам: Лобачевскому в 1829 г., Бойаи в 1832 г. (Их предшественником можно считать немецкого юриста Швейкарта, который пришел к мысли о возможности такой геометрии в 1818 г., но ничего не публиковал. Великий Гáусс, о котором будет сказано ниже, пришел к этой мысли еще раньше, но тоже ничего не публиковал.)

Выписанную выше аксиому о параллельных впредь будем называть *аксиомой Евклида* — хотя, как мы видели, у самого Евклида эта аксиома появилась в иной формулировке, закрепленной в его пятом постулате (он же одиннадцатая аксиома). Лобачевский и Бóйаи предложили вместо нее ее отрицание. Аксиома Евклида утверждает, что для всякой прямой p и всякой не лежащей на ней точки выполняется некоторое свойство. Отрицать аксиому Евклида — это значит утверждать, что бывает такая прямая и такая не лежащая на ней точка, для которых это свойство не выполнено. А свойство, о котором идет речь, — это свойство единственности параллельной прямой. Стало быть, отрицание аксиомы Евклида должно выглядеть так: *существует такая прямая p*

и такая точка, не лежащая на этой прямой, что через эту точку проходит *б о л е е* *одной прямой, параллельной прямой p.* Сравнительно просто доказать, что если указанное свойство нарушается для какой-то одной прямой и какой-то одной точки, то оно нарушается также и для всякой другой прямой и всякой не лежащей на ней точки. Поэтому нет нужды выделять какую-то одну прямую и какую-то одну точку, для которых нарушается свойство единственности параллельной прямой. А потому естественно формулируется следующая аксиома, которую мы будем называть *аксиомой Лобачевского–Бóйаи* или, короче, *аксиомой Лобачевского*:

Аксиома Лобачевского. *Через всякую точку, не лежащую на какой-либо прямой p, проходит более одной прямой, параллельной прямой p.*

Аксиома Лобачевского и лежит в основе геометрии Лобачевского. Геометрию же, основанную на аксиоме Евклида, стали называть — чтобы отличить ее от геометрии Лобачевского — **евклидовой геометрией**. Итак, система аксиом геометрии Лобачевского есть система аксиом евклидовой геометрии, в которой аксиома Евклида заменена на аксиому Лобачевского. Непротиворечивость евклидовой геометрии уже отмечалась. Геометрия Лобачевского также непротиворечива (точнее, она непротиворечива в той же степени, в какой непротиворечива евклидова геометрия).

В геометрии Лобачевского много непривычного для нас, воспитанных на евклидовой геометрии. Например: сумма углов треугольника всегда меньше двух прямых и притом своя у каждого треугольника; если треугольники подобны, то они равны; не бывает треугольников сколь угодно большой площади (это значит, что площадь треугольника не может быть больше некоторого числа, зависящего, разумеется, от выбора единицы площади). Неудивительно, что геометрия Лобачевского не получила признания современников. Гениальность Лобачевского и Бóйаи была признана только после их смерти (случившейся, соответственно, в 1856 и 1860 г.).

Был, впрочем, один человек, который все оценил (и даже выучил русский язык, чтобы читать сочинения Лобачевского). Это был один из величайших математиков всех времен (его даже называли «король математиков»), немецкий ученый Карл Фридрих Гáусс. Только из писем и дневников Гáусса, опубликованных после его смерти (в 1855 г.), стало ясно, что уже в начале XIX в. он пришел к тем же идеям, к каким позже пришли Бóйаи и Лобачевский. Однако, в отличие от Бóйаи и Лобачевского, Га́усс не стал ничего публиковать на эту тему, справедливо полагая, что научная общественность еще не готова воспринять столь смелые мысли. Когда же, наконец, возможность неевклидовой геометрии была осознана, это произвело переворот не только в математике, но и в философии.

Здесь мы снова вынуждены вернуться к философским проблемам. Кажется естественным вопрос, какая же из аксиом все же истинна, аксиома Евклида или аксиома Лобачевского. Давайте разберемся. Прежде всего надо понять, что значит «истинна». Казалось бы ясно: истинна — это значит соответствует реальному положению вещей. Как там, в реальном мире, одна параллельная прямая или много? А никак, потому что, как отмечалось в §3 и потом повторялось в §5, в реальном мире вообще нет прямых — как нет и других объектов геометрии. «Поверхности, линии, точки, как их определяет Геометрия, существуют только в нашем воображении», — писал в 1835 г. Лобачевский во вступлении к своему сочинению «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных». Аксиомы геометрии как раз и уточняют свойства этих существующих в нашем воображении понятий. Значит ли это, что мы можем написать какие угодно аксиомы? Нет, если мы хотим, чтобы геометрические понятия отражали наши представления о реальном физическом пространстве. Потому что хотя точки, прямые, поверхности не существуют реально, некие физические объекты и явления, приводящие к этим понятиям, безусловно существуют (если вообще признавать реальное существование окружающего нас мира).

Поэтому вопрос надо ставить так: какая из аксиом, Евклида или Лобачевского, точнее описывает те представления о структуре реального физического пространства, которые отражаются в геометрических образах. Строгий ответ на это вопрос таков: неизвестно. Однако можно с уверенностью утверждать, что в доступных нашему наблюдению областях пространства евклидова геометрия соблюдается с высокой степенью точности. Так что, когда мы говорим о неизвестности, мы имеем в виду очень большие области пространства. Дело в том, что отличие суммы углов треугольника от двух прямых тем больше, чем длиннее стороны этого треугольника; поэтому чем больше треугольник, тем больше надежды заметить это отличие — и тем самым подтвердить на практике аксиому Лобачевского. Отсюда возникает мысль измерять треугольники с вершинами в звездах (упомянутый выше Швейкарт употреблял для геометрии Лобачевского название *звездная геометрия*). Такими измерениями занимался сам Лобачевский, но точность измерительных приборов оказалась недостаточной, чтобы уловить отклонение суммы углов треугольника от суммы двух прямых углов, даже если таковое отклонение и существует.

Чтобы пояснить, как это может быть, что для меньших участков пространства действует одна геометрия, а для бóльших другая, воспользуемся следующей аналогией. При составлении плана местности нет нужды учитывать шарообразность Земли — именно потому, что участок, план которого снимается, небольшой. Поэтому для сравнительно небольших участков разумно исходить из того, что Земля плоская — именно поэтому это заблуждение так долго держалось. При составлении же карты России необходимо учитывать шарообразность Земли, а при тонких расчетах — тó, что Земля есть эллипсоид (а точнее — геоид). Поэтому «в малом» хорошо работает евклидова геометрия. О том, что происходит «в очень большом», мы еще знаем слишком мало. (В рассказе Уэллса «История Платтнера» его герой Готфрид Платтнер претерпевает некое фантастическое путешествие, после чего возвращается зеркально перевернутым. Уэллс объясняет это явление выходом в другой мир, в четвертое измерение. Теоретические представления о возможной геометрической структуре Вселенной не исключают того, что путешествие, приводящее к зеркальному отражению путешественника, может быть осуществлено и без выхода из нашего трехмерного мира.)

Перед создателями геометрии Лобачевского вставал вопрос о ее непротиворечивости, хотя они и не формулировали его с той отчетливостью, которая удовлетворила бы нас сегодня. Да и невозможно было его отчетливо сформулировать в условиях отсутствия четкой системы аксиом. Несомненно, они были убеждены в непротиворечивости своей геометрии. Их убеждение основывалось на следующих соображениях. Казалось совершенно очевидным и никогда не подвергалось никакому сомнению, что не может прийти к противоречию математик, рассуждающий в рамках евклидовой геометрии: ведь евклидова геометрия представляла собою достаточно развитую теорию (конечно, для нас это не доказательство непротиворечивости, но в начале XIX в. звучало совершенно убедительно). А геометрия Лобачевского могла быть развита столь же далеко и приобрести такие же стройные очертания, как и евклидова геометрия. Отсюда вывод: геометрия Лобачевского, в отношении ее непротиворечивости, не может быть хуже евклидовой геометрии. В наши дни такое рассуждение не кажется слишком убедительным, но по меркам первой половины XIX в. должно было бы считаться совершенно убедительным — а если и не убеждало большинство математиков, то только в силу того, что они не могли допустить и мысли, чтобы кто-нибудь смел покуситься на храм, возведенный Евклидом. А в конце XIX в. были построены модели геометрии Лобачевского, строительным материалом для которых служили геометрические конструкции евклидовой геометрии. Тем самым было обнаружено, что геометрия Лобачевского непротиворечива при условии (казавшемся, повторяем, очевидным), что непротиворечива евклидова геометрия. Непротиворечивость же евклидовой геометрии была, уже позже, установлена Гильбертом при создании своей системы аксиом (более точно, непротиворечивость евклидовой геометрии была установлена в предположении, казавшемся незыблемым, что непротиворечива теория действительных чисел).

И в заключение параграфа — о так называемой **абсолютной геометрии.** Бóйаи предложил называть *абсолютной* ту часть геометрии, которая не опирается ни на аксиому Евклида, ни на аксиому Лобачевского. Теоремами абсолютной геометрии являются те утверждения, которые могут быть доказаны с использованием всех остальных аксиом геометрии. Поэтому это есть те теоремы, которые верны и в геометрии Евклида, и в геометрии Лобачевского. Вот одна из таких теорем:

Ни в каком треугольнике сумма его углов не может быть больше, чем удвоенный прямой угол.

Замечание. Ясно, что абсолютная геометрия имеет по меньшей мере две различные модели: в одной выполняется аксиома Евклида, в другой — аксиома Лобачевского. А вот сколько моделей у системы аксиом евклидовой геометрии, т. е. у приведенной нами аксиоматики Гильберта — на этот вопрос мы ответим в конце § 14.

§ 11. Аксиомы эквивалентности. Богатые и бедные теории

Пример 1.

Выпишем некоторые очевидные свойства равенства. Вот они:

1. Если одно число равно второму, то это второе число равно первому.

2. Если одно число равно второму, а это второе число равно третьему, то первое число равно третьему.

3. Каждое число равно самому себе.

Пример 2.

Выпишем свойства подобия треугольников:

1. Если один треугольник подобен второму, то этот второй треугольник подобен первому.

2. Если один треугольник подобен второму, а этот второй треугольник подобен третьему, то первый треугольник подобен третьему.

3. Каждый треугольник подобен самому себе.

Пример 3.

Выпишем свойства равновеликости многоугольников:

1. Если один многоугольник равновелик второму (т. е. имеет ту же площадь), то этот второй многоугольник равновелик первому.

2. Если один многоугольник равновелик второму, а этот второй многоугольник равновелик третьему, то первый многоугольник равновелик третьему.

3. Каждый многоугольник равновелик самому себе.

Бросается в глаза, что во всех трех примерах мы имеем дело с одной и той же ситуацией. Имеется некоторое множество: множество чисел в примере 1, множество треугольников в примере 2, множество многоугольников в примере 3. На этом множестве определено некоторое отношение, в котором любые два элемента могут находиться или не находиться: два числа могут быть равны или не равны, два треугольника могут быть подобны или не подобны, два многоугольника могут быть равновелики или не равновелики. При этом свойства этих отношений одинаковы: список свойств, скажем, для треугольников легко превращается в список свойств для чисел: надо только заменить всюду «треугольник» на «число», а «подобен» на «равно».

Попытаемся описать ситуацию в общем виде. Прежде всего, должно быть указано некоторое множество; назовем его **носителем**. Так, в примере 3 носителем было множество многоугольников. На носителе задано некоторое **двуместное отношение**: это значит, что для любых двух элементов носителя определено, находится ли первый из них в рассматриваемом отношении ко второму или нет. Так, в примере 2 на множестве треугольников было задано отношение подобия. Чтобы говорить об этом отношении, давайте обозначим его какой-нибудь буквой, например, буквой R. Продолжаем описывать интересующую нас ситуацию в общем виде. Отношение R удовлетворяет следующим условиям:

1. *R симметрично.* Это значит вот что: *если элемент x находится в отношении R к элементу y, то и элемент y находится в этом же отношении R к элементу x.*

2. *R транзитивно.* Это значит вот что: *если элемент x находится в отношении R к элементу y, а элемент y находится в отношении R к элементу z, то и элемент x находится в отношении R к элементу z.*

3. *R рефлексивно.* Это значит вот что: *всякий элемент носителя находится в отношении R к самому себе.*

Утверждения «R симметрично», «R транзитивно», «R рефлексивно» называются, соответственно, *аксиомой симметричности, аксиомой транзитивности, аксиомой рефлексивности.* А в своей совокупности все эти аксиомы называются **аксиомами эквивалентности**.

Всякое отношение R, удовлетворяющее аксиомам эквивалентности, называется **отношением эквивалентности** или, короче, просто **эквивалентностью**. Таким образом, приведенные в наших трех примерах отношения равенства, подобия, равновеликости суть эквивалентности. Носитель, на котором задана эквивалентность, называется **носителем эквивалентности**.

Любое множество объектов с отношением эквивалентности служит моделью аксиом эквивалентности (надеемся, что читатель еще не забыл определение модели для системы аксиом, данное выше в §5). Поскольку такие модели существуют (см. выше примеры 1–3 и ниже примеры 4–7), система аксиом эквивалентности совместна и, следовательно, непротиворечива. Нетрудно убедиться, что она и независима. (Чтобы проверить, например, независимость аксиомы симметричности, достаточно взять натуральный ряд с заданным на нем отношением '$\leqslant$'; тогда, очевидно, аксиомы транзитивности и рефлексивности будут выполнены, а аксиома симметричности выполнена не будет: $3 \leqslant 5$, но неверно, что $5 \leqslant 3$.)

Попытаемся осознать, что есть общего и что различного в природе только что введенной аксиоматики эквивалентности, с одной стороны, и аксиоматики геометрии, которую мы излагали в предшествующих параграфах.

Общее состоит в строении аксиоматики с формально-логической точки зрения. В обоих случаях понятия не определяются, а лишь перечисляются — в аксиомах — свойства этих понятий. Для исходных геометрических понятий об этой стороне дела мы говорили уже достаточно. Что касается эквивалентности, то совершенно очевидно, что аксиомы эквивалентности не определяют никакого конкретного отношения эквивалентности: из этих аксиом невозможно установить, какие элементы эквивалентны, а какие нет (разве что аксиома рефлексивности сообщает, что x всегда эквивалентен x); аксиомы указывают лишь те свойства отношения, наличие коих позволяет объявить его эквивалентностью.

Различие состоит в соотношении предлагаемой системы аксиом с теми сущностями, теми явлениями, которые эта система аксиом призвана описывать, отражать и т. п. В случае аксиом геометрии такая сущность одна — это окружающее нас реальное физическое пространство и связанные с ним наглядные (иногда говорят «наивные») геометрические представления. В случае аксиом эквивалентности таких явлений много — это и равенство, и подобие, и равновеликость, и многое другое. Поэтому при создании аксиоматики геометрии и при создании аксиоматики эквивалентности преследовались совершенно разные цели. Целью аксиоматики геометрии было добиться того, чтобы у этой аксиоматики была одна *единственная* модель, которая и была бы объявлена отражающей те наши пространственные представления, которые связаны с окружающим нас реальным физическим пространством (очевидным образом — единственным). Как мы знаем, в аксиоматике Гильберта эта цель была достигнута. Цель аксиоматики эквивалентности — противоположная; эта цель — охватить *все* возможные явления, подпадающие под понятие эквивалентности.

Факт какой-либо аксиоматической теории — это, по определению, следствие ее аксиом. Теории бывают богатые и бедные; только надо твердо помнить, что это разделение не носит сколько-нибудь точного характера, это скорее эмоциональная качественная оценка. Поэтому тó, что Вы, уважаемый читатель, прочтете в следующей фразе, не следует воспринимать как математическое определение. Про теорию говорят, что она **богатая**, если в ней много содержательных фактов, и что она **бедная**, если таких фактов мало. Аксиоматическая геометрия — богатая теория: посмотрите, в одних только школьных учебниках геометрии сколько теорем! Аксиоматическая теория эквивалентности — бедная теория. Но как раз этот пример показывает, что бедность — не порок. Потому что зато каждая теорема об эквивалентности обслуживает разнообразные конкретные ситуации — и равенство, и подобие, и равновеликость, и многое другое.

Если у какой-то системы аксиом только одна модель, соответствующая аксиоматическая теория описывает всевозможные индивидуальные свойства этой модели. Как правило, таких свойств много и потому эта теория довольно богата, в ней много фактов. Если же у системы аксиом много моделей, то соответствующая аксиоматическая теория описывает свойства, присущие *всем* этим моделям. Таких *общих* свойств меньше, иногда совсем немного, и потому теория может оказаться довольно бедной, с небольшим числом фактов. Так и происходит в случае аксиоматической теории эквивалентности. Более содержательная теория получается, если рассматривать специальные виды эквивалентности.

Важное замечание. Все только что сказанное о возможной бедности теорий, имеющих много моделей, приложимо в той иной мере к аксиоматикам, рассматриваемым в следующих параграфах. Конечно, общая теория, скажем полей, гораздо богаче теории эквивалентности — но все же гораздо беднее геометрии.

Вот еще три примера отношений эквивалентности.

Пример 4. Фиксируем целое число $m > 1$. Скажем, что одно натуральное число находится к другому в отношении R_m, если совпадают остатки от деления этих чисел на m. Легко убедиться, что R_m есть эквивалентность.

Пример 5. Во избежание недоразумений ограничим наши рассмотрения евклидовой геометрией. Примем следующее усовершенствованное определение параллельности: две прямые параллельны, если они лежат в одной плоскости и либо не имеют общих точек, либо совпадают. При таком определении отношение параллельности есть эквивалентность на множестве всех прямых.

Пример 6. Множество X называется **равномощным** множеству Y, если между X и Y можно установить взаимно однозначное соответствие. Отношение равномощности есть эквивалентность.

Мы видим, что общим понятием ‘эквивалентность’, определяемым аксиомами эквивалентности, охватываются очень разнообразные и достаточно важные частные случаи. Когда про какое-то отношение обнаружено, что оно представляет собой эквивалентность, про находящиеся в этом отношении вещи начинают говорить, что они **эквивалентны**. Разумеется, выражение «вещь x эквивалентна вещи y» в каждом случае значит свое: в примере 1 «эквивалентна» значит «равна», в примере 2 — «подобна» и т. д.

Не зная ничего, как конкретно устроена та или иная эквивалентность, т. е. какие вещи эквивалентны, а какие нет, мы можем, тем не менее, доказывать утверждения, справедливые для произвольной эквивалентности. Ведь в аксиомах эквивалентности закреплены свойства, выполняющиеся для всех эквивалентностей. Само же отношение эквивалентности предстает в этих аксиомах в качестве исходного, неопределяемого понятия — подобно тому, как в аксиомах геометрии неопределяемым является понятие принадлежности.

Теорема 12 (теорема о классах эквивалентности). *Какова бы ни была эквивалентность, верно следующее. Ее носитель M можно разбить на попарно непересекающиеся и непустые части (подмножества), так что любые два элемента носителя, принадлежащие к одной и той же части, эквивалентны, а любые два элемента, принадлежащие разным частям, не эквивалентны. Разбиение с указанными свойствами единственно.*

Подмножества (части) носителя, о которых говорится в теореме 12, называются *классами эквивалентности*, или *смежными классами*. В примере 1 смежные классы одноэлементны: каждый класс состоит из одного единственного числа. В примере 2 каждый смежный класс состоит из всех подобных друг другу треугольников, он полностью определяется тремя числами, измеряющими три угла одного из этих треугольников. В примере 3 каждый смежный класс состоит из всех равновеликих друг другу многоугольников и полностью определяется величиной площади одного из этих многоугольников. В примере 4 каждый смежный класс состоит из всех чисел, дающих один и тот же остаток при делении на m, и полностью определяется величиной этого остатка. В примере 5 каждый смежный класс есть совокупность всех параллельных друг другу прямых. В примере 6 каждый смежный класс есть совокупность равномощных множеств, а то́, чем определяется этот класс, называется *мощностью множества* (так что равномощные множества имеют одинаковую мощность); в случае конечного множества его мощность есть просто число его элементов.

Теорема 12 доказывается очень просто. Подробного доказательства мы приводить не будем, а ограничимся его идеей. Для каждого элемента x носителя надо рассмотреть множество $K(x)$, составленное из всех элементов y, эквивалентных элементу x. Вот эти-то множества $K(x)$ и являются искомыми смежными классами.

Пример 7. Объявим два слова русского языка эквивалентными, если они начинаются с одной и той же буквы. Полученное отношение между словами действительно будет отношением эквивалентности. Смежный класс — это множество слов, начинающихся с данной буквы. Таких классов будет 31. (Вы полагаете, что меньше? Вот послушайте. В 1940-х годах московские математические олимпиады школьников проходили в старых зданиях Московского университета на Моховой улице. На дверях аудиторий вывешивались буквы, и школьники, чья фамилия начиналась на данную букву, должны были идти в соответствующую аудиторию. Один школьник никак не мог найти свою букву, чем вызывал недовольство у организаторов Олимпиады. Они считали, что он бестолковый. Но он не был бестолковым, просто его фамилия начиналась на букву Ы, а такую букву, равно как буквы Й, Ъ, Ь, решили не вывешивать. С тех пор в течение многих лет соблюдалось правило: при проведении олимпиад указывать *все* буквы русского алфавита.)

Антипример. Объявим два слова русского языка эквивалентными, если в их составе есть общая буква. Объявить-то мы объявили, но никакой эквивалентности у нас не получилось, потому что построенное отношение между словами не транзитивно. Вспомним слова *кот*, *кит* и *мир*, которые мы уже рассматривали в нашем §8. Слово *кот* имеет общую букву со словом *кит*, слово *кит* имеет общую букву со словом *мир*, а вот слово *кот* со словом *мир* общей буквы не имеет. Поэтому никаких смежных классов здесь не будет.

Теорема о классах эквивалентности находит в математике широчайшие применения, и ее по праву можно считать одной из главных теорем математики (а то и самой главной теоремой).

Ярким применением этой теоремы служит **построение рациональных чисел из чисел натуральных.**

Сперва надо построить целые числа. Они строятся из натуральных очень просто: к натуральным числам надо присовокупить их «отрицательные дубликаты», т. е. вместе с каждым натуральным m ввести в рассмотрение число $-m$. И ко всей полученной совокупности положительных и отрицательных целых чисел присоединить еще ноль.

Теперь переходим к построению системы рациональных чисел. Начинаем с того, что рассматриваем дроби, т. е. выражения вида $\frac{m}{n}$, где m — произвольное целое число, а n — произвольное положительное целое число. Дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{10}$ различны (хотя бы потому, что вторая сократима, а первая несократима), но будут выражать одно и то же рациональное число — разумеется, это может быть обнаружено лишь после того, как будет введено понятие 'рациональное число'. Сложение и умножение дробей вводится по обычным правилам: $\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}=\frac{mn'+m'n}{mn}$; $\frac{m}{n}\cdot\frac{m'}{n'}=\frac{mm'}{nn'}$.

Но нас интересуют не столько дроби, сколько рациональные числа. А что же такое рациональное число? Математика отвечает на этот вопрос так. На дробях вводится следующее отношение эквивалентности: две дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{m'}{n'}$ объявляются эквивалентными, коль скоро $mn' = m'n$. Это действительно эквивалентность: выполнение аксиом легко проверяется. Тогда по теореме о классах эквивалентности возникают смежные классы; вот эти-то классы и объявляются рациональными числами. А записывается, называется, выражается и т. д. рациональное число посредством любой дроби, принадлежащей этому рациональному числу, рассматриваемому как класс эквивалентных (по школьному — «равных») дробей. Операции сложения и умножения дробей *согласованы* с этой эквивалентностью. Это значит, что суммы и произведения эквивалентных дробей эквивалентны. Более подробно, если дроби A и A' эквивалентны и дроби B и B' эквивалентны, то будут эквивалентны как суммы $A + B$ и $A' + B'$, так и произведения $A \cdot B$ и $A' \cdot B'$. Это нетрудно проверить — но это необходимо проверить. Только после такой проверки на согласованность возникает возможность перенести операции сложения и умножения с дробей на рациональные числа. А именно, чтобы сложить два рациональных числа, r и r', надо взять какие-нибудь дроби, выражающие эти числа (т. е. принадлежащие к ним как к классам эквивалентности), сложить их и затем взять в качестве суммы $r + r'$ тот смежный класс, к которому принадлежит найденная сумма дробей. Аналогично для умножения. То́, что проверка на согласованность необходима, показывает следующий антипример. Ничто нам не мешает определить для двух дробей операцию «∇» (этот знак читается «на́бла»), положив: $\frac{m}{n} \nabla \frac{m'}{n'} = \frac{m + m'}{n + n'}$. Однако попытка перенести ее на рациональные числа проваливается, и именно потому, что эта операция «∇» не выдерживает проверки на согласованность с эквивалентностью: дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{10}$ эквивалентны, дроби $\frac{3}{7}$ и $\frac{9}{21}$ также эквивалентны, но дроби $\frac{1+3}{2+7}$ и $\frac{5+9}{10+21}$ не эквивалентны.

§ 12. Аксиомы предшествования

Любое множество чисел естественно упорядочивается по возрастанию. Как говорят математики, на этом множестве вводится *отношение линейного порядка*. Это значит, что про любые два неравные числа можно сказать, которое из них меньше, а которое больше. Если задано отношение ‘меньше’, то автоматически возникает отношение ‘больше’, и наоборот. Кроме того, так же автоматически возникают отношения «меньше или равно» и «больше и равно». Короче, если мы знаем, что такое '$<$' и '$>$', то мы знаем и что такое '$\leqslant$' и '$\geqslant$'(т. е. мы знаем, что $0 \leqslant 0$, $0 \leqslant 1$, $1 \geqslant 1$, $1 \geqslant 0$ и т. д.).

Можно поступить и наоборот: сперва определить, что́ такое '$\leqslant$' ('меньше или равно') и '$\geqslant$' ('больше или равно'), а отсюда уже вывести отношения '$<$' («меньше») и '$>$' («больше»). Отношения '$<$' и '$>$' суть частные случаи *строгого порядка*, а отношения '$\leqslant$' и '$\geqslant$' суть частные случаи *нестрогого порядка*. А что такое, в общем виде, строгие и нестрогие порядки, мы сейчас скажем. Эти понятия задаются аксиоматически.

В математике часто рассматриваются такие системы объектов, для которых имеет смысл говорить, что один объект *предшествует* другому или, что то же самое, этот другой *следует* за первым. Разумеется, или слово «следует», или слово «предшествует» должно быть при этом определено — а другое слово наполняется тогда смыслом автоматически.

Пример 1. Рассмотрим множество всех точек пространства. Выделим некоторую точку O и будем говорить, что точка y *следует* за точкой x, если y ближе к O, нежели x.

Пример 2. Рассмотрим множество всех точек пространства. Выделим некоторую точку O и будем говорить, что точка y *следует* за точкой x, если x ближе к O, нежели y.

Пример 3. Будем говорить, что целое число m *предшествует* целому числу n, если $m < n$.

Пример 4. Будем говорить, что целое число m *предшествует* целому числу n, если $m > n$.

Пример 5. Будем говорить, что целое число m *предшествует* целому числу n, если m делится на n, но не совпадает с n.

Пример 6. Будем говорить, что целое число m *предшествует* целому числу n, если n делится на m, но не совпадает с m.

Во всех этих примерах отношение предшествования обладает следующими двумя свойствами:

1) *если элемент x предшествует элементу y, а элемент y предшествует элементу z, то элемент x предшествует элементу z*;

2) *никакой элемент не предшествует самому себе.*

Первое свойство отношения предшествования, как мы знаем из предыдущего параграфа, называется *транзитивностью*. А второе свойство называется *антирефлексивностью*. Транзитивное и антирефлексивное отношение называется **отношением строгого порядка** или, короче, просто **строгим порядком**. Таким образом, все отношения из примеров 1–6 суть отношения строгого порядка.

Два утверждения, выражающие соответственно транзитивность и антирефлексивность какого-либо отношения, называются в своей совокупности **аксиомами строгого порядка**. Следовательно, мы можем сказать, что строгий порядок — это такое двуместное отношение, которое удовлетворяет аксиомам строгого порядка. Аксиомы строгого порядка называют также **аксиомами предшествования** — это для того, чтобы избежать путаницы с аксиомами порядка в геометрии (см. выше § 7).

Если же взять отношение ‘меньше или равно’, определенное на числах, то оно также будет транзитивно, но не антирефлексивно, а, напротив, рефлексивно: всегда $a \leqslant a$. Кроме того, оно удовлетворяет следующей *аксиоме антисимметричности*: «если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то $a = b$». Аксиомы транзитивности, рефлексивности и антисимметричности называются в своей совокупности **аксиомами нестрогого порядка**, а любое двуместное отношение, удовлетворяющее этим аксиомам — **нестрогим порядком**.

Однако вернемся к строгим порядкам.

Теорема 13. Пусть дано отношение строгого порядка. Ни для каких x и y не может быть, чтобы одновременно x предшествовал y и y предшествовал x.

Доказательство. Если x предшествует y и y предшествует x, то по аксиоме транзитивности (беря x в качестве z) получаем, что x предшествует x, что́ нарушает антирефлексивность.

Однако может случиться так, что ни один из двух различных элементов не предшествует другому. Так, в примере 6 ни число 10 не предшествует числу 12, ни число 12 не предшествует числу 10. Но вот среди людей, стоящих в очереди, каких двух человек ни возьми, всегда один из них будет предшествовать другому (а этот другой, стало быть, следовать за первым). Поэтому представляют специальный интерес такие строгие порядки, которые удовлетворяют следующему дополнительному условию: *какие два различных элемента ни взять, непременно один из них будет предшествовать другому.* Рассмотрим, вообще, произвольное двуместное отношение R, заданное на некотором множестве — носителе отношения. Если R обладает тем свойством, что для всяких двух элементов носителя непременно или x находится в отношении R к y, или y находится в отношении R к x, то такое отношение назовем *свя́зным.* То отношение строгого порядка, которое имеется между людьми в очереди, является, очевидно, связным. А отношение строгого порядка, которое является связным, называется строгим **линейным** порядком. Строгие порядки из наших примеров 3 и 4 как раз и являются *линейными*. Читатель, наверное, уже догадался, что отношение нестрогого порядка, которое является связным, называется нестрогим линейным порядком.

Утверждение, что рассматриваемое отношение является связным, назовем *аксиомой связности*. Таким образом, *линейный порядок — это такой порядок, который удовлетворяет аксиоме связности.*

Обозначение. Тот факт, что x предшествует y (и, стало быть, y следует за x), записывают так: $x \prec y$.

Комментарий. А почему нельзя для предшествования использовать привычный знак «<»? А потому что иногда, как в примере 4, предшествование совпадает с отношением 'больше', выражаемым знаком «>», и если бы мы выражали предшествование знаком «<», произошла бы путаница.

Аксиомы строгого порядка, пополненные аксиомой, выражающей связность рассматриваемого отношения, называются в своей совокупности **аксиомами строгого линейного порядка**. Ввиду их важности, повторим их, используя только что введенный знак «$\prec$». Итак,

Аксиомы строгого линейного порядка

1. Аксиома транзитивности. *Если $x \prec y$ и $y \prec z$, то $x \prec z$.*

2. Аксиома антирефлексивности. *Ни для какого x не может быть, чтобы $x \prec x$.*

3. Аксиома связности. *Если $x \neq y$, то выполняется хотя бы одно из двух: $x \prec y$ или $y \prec x$.*

Множество элементов, на котором задано отношение строгого линейного порядка, называется *линейно упорядоченным множеством*. Каждое линейно упорядоченное множество является моделью для системы аксиом строгого линейного порядка. Эта система совместна (поскольку ее модели — линейно упорядоченные множества — существуют) и, стало быть, непротиворечива. Можно проверить, что она независима.

Аксиомы строгого линейного порядка не задают никакого конкретного порядка, из них невозможно узнать, какой элемент кому предшествует (разве что аксиома антирефлексивности позволяет заключить, что никакой элемент не предшествует сам себе); да и какие именно элементы имеются в виду, из аксиом тоже узнать нельзя. В этих аксиомах лишь перечисляются общие свойства всех строгих линейных порядков. Само же отношение предшествования предстает в этих аксиомах как исходное, неопределяемое понятие.

§ 13. Аксиомы коммутативного кольца и аксиомы поля

Множество всех четных чисел *замкнуто* относительно сложения. Это значит, что результат сложения, примененного к двум элементам этого множества, принадлежит тому же множеству: сумма двух четных чисел четна. Это же множество замкнуто и относительно умножения. Это значит, что результат умножения, примененного к двум элементам этого множества, принадлежит тому же множеству: произведение двух четных чисел четно. Относительно умножения замкнуто и множество всех нечетных чисел: произведение двух нечетных чисел нечетно. А вот относительно сложения множество всех нечетных чисел не замкнуто: сумма двух нечетных чисел четна. Будет ли замкнуто относительно сложения множество всех чисел, не делящихся на 3? Нет, потому что 2 и 7 не делятся на три, а их сумма делится, т. е. не принадлежит к рассматриваемому множеству. Прежде, чем читать дальше, постарайтесь самостоятельно найти несколько таких *числовых* (т. е. составленных из чисел) множеств, которые были бы замкнуты и относительно сложения, и относительно умножения. Чуть ниже мы приведем такие примеры.

Вообще, **двуместной операцией** на множестве M называется определенная на M функция двух аргументов, которая с каждой парой элементов этого множества сопоставляет некоторый элемент того же множества, называемый *результатом операции*. Из определения понятия операции следует, что множество всегда замкнуто относительно определенной на нем операции. Поэтому про сложение можно сказать, что оно является операцией на множестве всех четных чисел, но не является операцией на множестве всех нечетных чисел.

А теперь — примеры числовых множеств, замкнутых и относительно сложения, и относительно умножения: 1) натуральный ряд; 2) множество всех целых чисел; 3) множество положительных рациональных чисел; 4) множество всех рациональных чисел; 5) множество неотрицательных действительных чисел; 6) множество всех действительных чисел; 7) множество всех натуральных чисел, делящихся на заданное число; 8) множество всех целых чисел, делящихся на заданное число. Про каждое их этих множеств можно было бы сказать, что сложение и умножение служат для него операциями.

Давайте выпишем в виде аксиом некоторые основные свойства, которыми обладают сложение и умножение как операции на множестве всех действительных чисел (т. е. в нашем 6-м примере). Эти аксиомы в своей совокупности носят такое название:

Аксиомы коммутативного кольца

1. Аксиома ассоциативности сложения:

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

2. Аксиома коммутативности сложения:

$$a+b=b+a.$$

3. Аксиома существования разности:

Для всяких a и b существует такой x, что $a+x=b$.

4. Аксиома ассоциативности умножения:

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c).$$

5. Аксиома коммутативности умножения:

$$a\cdot b=b\cdot a.$$

6. Аксиома дистрибутивности:

$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c.$$

Помимо 6-го примера, система аксиом коммутативного кольца справедлива для примеров 2-го, 4-го и 8-го. А вот для примеров 1-го, 3-го, 5-го и 7-го она не выполняется: для этих примеров будут справедливы все аксиомы, кроме аксиомы существования разности (а раз хоть одна аксиома из системы не выполняется, то и вся система в целом признается невыполняющейся).

Любое множество чисел, замкнутое относительно сложения и умножения, для которого выполняются аксиомы коммутативного кольца, называется **числовым кольцом**. Ясно, что аксиомы 1–2 и 4–6 будут выполняться автоматически, коль скоро мы рассматриваем обычные сложение и умножение, так что проверять надо только аксиому 3 (существования разности). Приглашаем читателя найти еще хотя бы один пример числового кольца.

Числовые кольца — это частный случай *коммутативных колец*, которые и составляют основной предмет этого параграфа. Переход от более узкого понятия числового кольца к более широкому понятию коммутативного кольца мы совершим постепенно. На первом этапе мы откажемся от того, чтобы рассматривать в качестве элементов кольца только числа. А на втором — от того, чтобы в качестве операций рассматривать лишь обычное сложение и умножение.

Итак, этап первый. Рассмотрим множество всевозможных многочленов с действительными коэффициентами. Это множество замкнуто относительно сложения и умножения многочленов, поэтому сложение и умножение суть операции, определенные на этом множестве. Все аксиомы коммутативного кольца выполняются. Рассмотрим множество всех функций действительного переменного. Сложение и умножение суть операции на этом множестве. Все аксиомы коммутативного кольца выполняются. Мы еще не знаем, что такое коммутативное кольцо, но уже чувствуем, что приближаемся к какому-то важному обобщению понятия числового кольца. Так оно и есть. Обобщение произойдет на следующем этапе.

Предположим, что на каком-то множестве определены какие-то две двуместные операции. Назовем одну из них *сложением* и будем обозначать обычным знаком «+». Другую назовем *умножением* и будем обозначать обычным знаком «·». Предположим далее, что для этих операций выполняются все аксиомы коммутативного кольца. Тогда говорят, что мы имеем дело с *коммутативным кольцом*. Иными словами, **коммутативное кольцо** есть множество, рассматриваемое вместе с определенными на нем операциями, причем выполняются все аксиомы коммутативного кольца. А сами эти две операции будем называть *кольцевыми*. Теперь мы видим, что все наши числовые кольца суть не что иное, как коммутативные кольца, в которых кольцевыми операциями служат обычные сложение и умножение чисел. Далее, если в качестве кольцевых операций рассматривать сложение и умножение многочленов, то множество всех многочленов с действительными коэффициентами тоже образует коммутативное кольцо. Наконец, если кольцевыми операциями объявить сложение и умножение функций, то коммутативным кольцом окажется и множество всех функций действительного переменного. В самих же аксиомах кольцевые операции никак не определяются, а являются исходными, неопределяемыми понятиями.

До сих пор в качестве кольцевых операций выступали привычные нам сложение и умножение — чисел, многочленов, функций. Но вот примеры иного рода.

Пример 1. Рассмотрим множество, состоящее из нуля и единицы. Кольцевые операции определим так:

$$0+0=0;\ 0+1=1;\ 1+0=1;\ 1+1=0;$$
$$0\cdot 0=0;\ 0\cdot 1=0;\ 1\cdot 0=0;\ 1\cdot 1=1.$$

Легко проверить, что все аксиомы коммутативного кольца выполнены, так что перед нами — коммутативное кольцо. Надеемся, что читатель все понял правильно, и его не смутило то́, что у нас 1+1=0. Просто у нас знак «+» понимается в новом смысле, отличном от обычного суммирования двух чисел. Но если читателя это смутило, он может обозначить кольцевое сложение в этом примере каким-нибудь особым знаком, например знаком «$\oplus$» (только тогда надо будет аксиомы кольца переписать с использованием этого нового знака вместо старого плюса).

Пример 2. На множестве из 4 элементов A, B, C, D определим сложение и умножение посредством следующих таблиц:

$+$	A	B	C	D
A	A	B	C	D
B	B	A	D	C
C	C	D	A	B
D	D	C	B	A

$\cdot$	A	B	C	D
A	A	A	A	A
B	A	B	A	B
C	A	A	C	C
D	A	B	C	D

Мы получим коммутативное кольцо.

Замечание. Произведем маленькое изменение в примере 2. Положим теперь $A+B=C$ и $B+A=C$, а в остальном оставим все, как было. Теперь то же множество $\{A, B, C, D\}$, но с по-новому определенной операцией сложения, перестает быть кольцом: действительно, уравнение $A+x=B$ теперь оказывается не имеющим решения.

Пример 3. Фиксируем какое-либо множество M. Теперь рассмотрим множество W, состоящее из всех частей (подмножеств) этого множества M. На множестве W подмножеств следующим образом определим сложение и умножение. Пусть A и B суть элементы множества W и, стало быть, подмножества множества M. В качестве произведения $A\cdot B$ возьмем $A\cap B$. В качестве суммы $A+B$ возьмем $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. Можно проверить, что все аксиомы коммутативного кольца выполняются, так что мы имеем пример коммутативного кольца.

Пример 4. Поскольку в этом примере наряду с кольцевыми операциями встретятся также и обычные сложение и умножение чисел, у нас нет другого выхода, кроме как обозначить кольцевые операции как-нибудь по-другому. Примем здесь для обозначения кольцевого сложения знак «$\oplus$», а для обозначения кольцевого умножения — знак «$\odot$». После этих предварительных соглашений рассмотрим множество $\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ и так определим на нем кольцевые операции. В качестве $a \oplus b$ возьмем остаток от деления числа $a+b$ на число m. В качестве $a \odot b$ возьмем остаток от деления числа $a \cdot b$ на число m. Мы получим коммутативное кольцо. Оно называется **кольцом вычетов по модулю** m.

Пользуясь терминологией нашего § 5, можно сказать, что *коммутативное кольцо — это то же самое, что модель аксиом коммутативного кольца.* Пользуясь этими аксиомами, можно развивать *аксиоматическую теорию каммутативных колец.* Эта теория состоит из тех теорем, которые можно доказать, опираясь на аксиомы. И эти теоремы будут выражать факты, верные во всех моделях наших аксиом — т. е. во всех коммутативных кольцах. Нижеследующие теоремы 14–18 — это начальные теоремы теории колец. Но сначала — одно определение.

Элемент o какого-либо кольца называется *нулевым*, если для всякого элемента q этого кольца выполняется равенство $q + o = q$. В силу аксиомы коммутативности сложения, последнее равенство можно записать и так: $o + q = q$. Легко проверить, что, скажем, в примере 2 элемент A будет нулевым.

Т е о р е м а 1 4. Во всяком кольце нулевой элемент (если он есть) единственен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть o_1 и o_2 — нулевые элементы. Так как o_2 — нулевой, то $o_1 + o_2 = o_2$. Но так как o_1 — тоже нулевой, то $o_1 + o_2 = o_1$. Поэтому $o_1 = o_2$.

Теорема 14 дает нам право как-нибудь обозначить нулевой элемент. Согласимся, что до установления этой теоремы у нас такого права не было: ведь если бы нулевых элементов было много, то обозначение было бы дву- и даже многосмысленно. Обычно нулевой элемент обозначают так: 0. И называют *нулем* кольца. Следующую теорему 15 приведем без доказательства.

Т е о р е м а 1 5. В кольце для всякого элемента q справедливо равенство $q \cdot 0 = 0 \cdot q = 0$.

Т е о р е м а 1 6. Во всяком кольце существует нулевой элемент.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольный элемент a рассматриваемого кольца и найдем какое-нибудь такое x, что $a + x = a$.

Такое x существует по аксиоме 3. Докажем, что элемент x — нулевой. Для этого нужно убедиться,что для произвольно взятого q справедливо равенство $q + x = q$. С этой целью, применяя ту же аксиому 3, найдем такое y, что $a + y = q$. По аксиоме 2, $y + a = q$. А теперь, используя аксиому 1, записываем

$$q + x = (y + a) + x = y + (a + x) = y + a = q.$$

Теорема 17. Во всяком кольце уравнение $a + x = b$ имеет единственное решение.

Комментарий. То́, что выписанное уравнение имеет решение, провозглашается аксиомой 3. Смысл теоремы в том, что это решение только одно. Доказательства этой теоремы приводить не будем.

Замечание. Возможно, читатель уже обратил внимание, что в доказательствах теорем 14 и 16 использовались только первые три аксиомы. Это обстоятельство знаменательно. Дело в том, что эти три аксиомы, взятые сами по себе, определяют важное математическое понятие *коммутативной группы*. По определению, **коммутативная группа** есть множество, рассматриваемое вместе с определенной на нем двуместной операцией (сложением), подчиненной аксиомам 1, 2 и 3. Теоремы 14–17 справедливы для любой коммутативной группы. Коммутативное кольцо, таким образом, можно определить так: *коммутативное кольцо есть коммутативная группа, на котором, помимо сложения, определена еще и другая двуместная операция* (*умножение*), *так что выполняются аксиомы* 4, 5, 6.

Элемент кольца называется *единичным*, если для всякого элемента q этого же кольца выполняется равенство $1 \cdot q = q \cdot 1 = q$.

Теорема 18. Во всяком кольце единичный элемент (если он есть!) единственен.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 14.

Теорема 18 позволяет нам ввести какое-нибудь обозначение для единичного элемента кольца. Обычно его обозначают символом 1 и называют *единицей* кольца. Как мы видели, нуль есть во всяком кольце. А вот единица — не во всяком. Например, ее нет в кольце всех четных чисел (и, вообще, в кольце всех целых чисел, делящихся на заданное число). Во всех же остальных из приведенных выше примеров единичный элемент существует. Так, в кольце многочленов единичным элементом служит многочлен нулевой степени со свободным членом 1 (иными словами, число 1, рассматриваемое в качестве многочлена). В кольце функций единичным элементом является функция, для всех своих аргументов принимающая значение 1. В примере 2 — элемент D, в примере 3 — само множество M (которое является подмножеством самого себя и потому — элементом кольца W). В дальнейшем нас будут интересовать только *кольца с единицей.*

Элемент b кольца с единицей называется *обратным* к элементу a, если $a \cdot b = 1$.

Задачи

1. В кольце вычетов по модулю 10 найти обратный элемент к числу 3. Ответ: 7. Действительно, остаток от деления $3 \cdot 7$ на 10 равен 1. Значит, $3 \odot 7 = 1$.

2. В кольце вычетов по модулю 7 для элемента 6 найти обратный элемент. Ответ: 6. Действительно, остаток от деления $6 \cdot 6$ на 7 есть 6. Значит, $6 \odot 6 = 1$. Таким образом, в кольце вычетов по модулю 7 элемент 6 сам себе обратен.

3. В кольце вычетов по модулю 10 найти обратный элемент к числу 4. Ответ: такового не существует. Действительно, нет такого числа b, чтобы остаток от деления $4b$ на 10 равнялся 1.

Аксиома 3 гарантирует нам возможность вычитания. А как обстоит дело с делением? Всегда ли возможно найти такое x, чтобы было $a \cdot x = b$? Если $x = 0$, то, в силу теоремы 15, и $b = 0$; поэтому деление на нуль ненулевого элемента невозможно. А если элемент a ненулевой? Тогда деление также может оказаться невозможным. Скажем, в примере 2 элемент B ненулевой, однако нет такого x, чтобы было $B \cdot x = C$. Да и в кольце многочленов не каждый многочлен делится на каждый.

Хочется выделить тот класс колец, в котором всегда возможно деление на произвольный ненулевой элемент. Вот важное определение. Коммутативное кольцо называется **полем**, если выполняются следующие две аксиомы поля.

Аксиома 7. *Существует единичный элемент, отличный от нулевого.*

Комментарий. Добавка «отличный от нулевого» кажется странной. А разве единица кольца может равняться его нулю? Оказывается, может — правда в том только случае, когда все кольцо состоит из одного единственного элемента. Тогда этот единственный элемент можно складывать только с самим собой и умножать только на самого себя, и в качестве результата будет возникать опять он же. Этот элемент будет и нулевым (поскольку при сложении с любым элементом q дает q), и единичным (поскольку при умножении на любой элемент q дает q). Поля не желают допускать в свою компанию это вырожденное кольцо.

Аксиома 8. *Ко всякому ненулевому элементу а найдется обратный элемент.*

Таким образом, полный список **аксиом поля** состоит из аксиом кольца и двух дополнительных аксиом поля. Поле можно определить как модель системы аксиом поля. Приведем без доказательства одну из простейших теорем аксиоматической теории полей.

Теорема 19. Для каждого ненулевого элемента поля обратный к нему единственен.

Теорема 19 дает нам право ввести обозначение для элемента, обратного к элементу x; его обозначают x^{-1}. Важнейшее достоинство поля состоит в том, что в нем всегда возможно деление на ненулевой элемент. Об этом говорит теорема 20.

Теорема 20. Пусть в некотором поле его элемент a не равен нулю. Тогда для всякого элемента b того же поля уравнение $ax = b$ имеет решение, и это решение единственно.

Доказательство. Положим $x = a^{-1}b$. Тогда

$$ax = a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = 1 \cdot b = b.$$

Таким образом, $a^{-1}b$ есть искомое решение. Убедимся, что других решений нет. Пусть q — какое-нибудь решение того же уравнения, т.е. имеет место равенство $aq = b$. Тогда

$$q = 1 \cdot q = (a^{-1} \cdot a)q = a^{-1}(aq) = a^{-1}b.$$

Из приводимых выше колец следующие будут полями: кольцо рациональных чисел, кольцо действительных чисел, двухэлементное кольцо из примера 1. А вот будет ли полем кольцо вычетов по модулю m из примера 4, зависит от этого m. Оказывается, кольцо вычетов по модулю m тогда и только тогда является полем, когда число m — простое.

Вот еще два примера полей.

Пример 5. Рассмотрим множество всех чисел вида $a+b\sqrt{2}$ с рациональными a и b. В качестве кольцевых операций возьмем обычные сложение и умножение. Мы получим поле.

Пример 6. Число называется *алгебраическим*, если оно является корнем многочлена $a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ с целыми коэффициентами, из которых хоть один не равен нулю. Множество всех алгебраических действительных чисел, рассматриваемое с обычными сложением и умножением, представляет собой поле.

Поля из примеров 5 и 6 являются числовыми полями — т. е. такими числовыми кольцами, которые суть поля. (Помните, после формулировки аксиом кольца мы дали определение числового кольца и пригласили читателя найти дальнейшие примеры таких колец?) Поле вычетов по простому модулю дает пример нечислового поля.

§ 14. Упорядоченные поля и аксиоматика поля действительных чисел

Давайте посмотрим на какое-нибудь *числовое поле*, т. е. поле, составленное из каких-нибудь — может быть, всех, а может быть, и не всех — действительных чисел. Таковы, например, поле всех действительных чисел, поле всех рациональных чисел, поле всех чисел вида $a + b\sqrt{2}$, поле всех чисел вида $a + b\sqrt{38}$, поле всех алгебраических чисел — или что-нибудь еще. Сразу видно, что это не только поле, но еще и линейно упорядоченное множество, где в качестве отношения предшествования $\prec$ выступает обычное отношение порядка '$<$'. При этом операции поля определенным образом согласованы с отношением порядка. Так, если два числа соответственно меньше двух других, то и сумма первых двух чисел будет меньше суммы этих вторых. А вот для умножения дело обстоит сложнее: $-10 < -5$, $-3 < -2$, но $(-10) \cdot (-5) > (-3) \cdot (-2)$. Но и умножение, конечно же, согласовано с порядком: надо только учитывать знаки множителей.

Анализируя эти согласованные друг с другом свойства сложения, умножения и порядка, мы приходим к новому важному понятию — понятию *линейно упорядоченного* поля. Это понятие вводится аксиоматически. А именно, **линейно упорядоченное поле** определяется как множество, рассматриваемое вместе с двумя определенными на нем двуместными операциями: сложением '$+$' и умножением '$\cdot$'— и одним двуместным отношением: отношением предшествования '$\prec$', — причем выполняются все аксиомы линейного порядка, все аксиомы поля и еще две аксиомы согласованности:

Аксиома согласованности для сложения:
Если $a \prec b$, то $a + c \prec b + c$.

Аксиома согласованности для умножения:
Если $a \prec b$, и $0 \prec c$, то $a \cdot c \prec b \cdot c$.

Таким образом, линейно упорядоченное поле есть одновременно и линейно упорядоченное множество, и поле, причем операции и порядок связаны условиями, записанными в аксиомах согласованности.

Осталось совсем немного, чтобы сформулировать аксиоматику действительных чисел, т. е. задать понятие действительного числа путем выписывания системы аксиом — подобно тому, как это было сделано в предыдущих параграфах для таких понятий, как 'точка', 'прямая', 'плоскость'.

Но для этого нам будут полезны еще несколько понятий — впрочем, интересных и даже красивых сами по себе. Если у нас есть линейно упорядоченное множество, то наглядно понятно, что значит «рассечь его в некотором месте на две половины». А вот точное определение. *Сечением* линейно упорядоченного множества называется всякое разбиение его на такие две непустые и непересекающиеся части, что всякий элемент одной части предшествует всякому элементу другой части.

Пример 1. В натуральном ряду можно задать такое сечение: к одной части отнести все числа, меньшие, чем 2001, а к другой — все числа, большие, чем 2000.

Пример 2. В множестве рациональных чисел можно задать такое сечение: к одной части отнести все числа, меньшие числа π, а к другой — все числа, большие числа π.

Пример 3. В множестве действительных чисел можно задать такое сечение: к одной части отнести все числа, меньшие числа π, а к другой — все числа, большие или равные числу π (если мы поступим, как в примере 2, это не будет разбиением на две части, так как π не попадет ни в одну из частей).

Пример 4. Еще одно сечение в множестве действительных чисел: к одной части относим все числа, большие числа π, к другой — все остальные числа.

Та часть сечения, где находятся элементы, предшествующие элементам другой части, называется *нижним классом* сечения, другая часть — *верхним классом.*

В примере 1 в нижнем классе есть наибольшее число (это 2000), а в верхнем есть наименьшее (это 2001). В примере 2 нет ни наибольшего числа в нижнем классе, ни наименьшего числа в верхнем классе. В примере 3 в нижнем классе нет наибольшего числа, в верхнем классе есть наименьшее: это число π. В примере 4 в нижнем классе есть наибольшее число (опять-таки π), в верхнем классе нет наименьшего.

Если, вообще, мы рассматриваем какую-нибудь часть произвольного (не обязательно числового) линейно упорядоченного множества, то элемент называется ***наименьшим*** элементом этой части, если он предшествует всем элементам этой части, кроме самого себя. Аналогично, элемент называется ***наибольшим*** элементом рассматриваемой части, если он следует за всеми элементами этой части, кроме самого себя. Поэтому, какое сечение линейно упорядоченного множества ни взять, для него непременно имеет место одна из следующих четырех возможностей:

1) в нижнем классе есть наибольший элемент, а в верхнем классе есть наименьший элемент; такое сечение называется *скачком*;
2) в нижнем классе нет наибольшего элемента, а в верхнем классе нет наименьшего элемента; такое сечение называется *щелью*;
3) в нижнем классе нет наибольшего элемента, но в верхнем классе есть наименьший элемент; такое сечение называется *дедекиндовым сечением* (в честь математика Де́декинда, который упоминался выше в § 9);
4) в нижнем классе есть наибольший элемент, но в верхнем классе нет наименьшего элемента; такое сечение также называется *дедекиндовым.*

В примере 1 мы имели скачок в множестве натуральных чисел. Ясно, что в этом множестве иных сечений и не бывает. С другой стороны, скачки невозможны ни в множестве всех рациональных, ни в множестве всех действительных чисел. В примере 2 мы имели щель в множестве всех рациональных чисел; однако здесь возможны и дедекиндовы сечения. В примерах 3 и 4 мы имели дедекиндовы сечения в множестве всех действительных чисел. Других сечений в множестве действительных чисел не бывает, и вот это-то и есть то́ свойство, которое выделяет множество действительных чисел среди всех линейно упорядоченных полей.

Итак, в множестве всех действительных чисел не бывает иных сечений, кроме дедекиндовых. Теперь вопрос: почему не бывает? Ответ на этот вопрос зависит от того, что мы понимаем под действительным числом.

Возможно два принципиально различных ответа на этот вопрос.

Первый ответ: мы строим действительные числа, отправляясь от натуральных. (Как сказал известный немецкий математик XIX в. Леопольд Кро́некер, «Бог создал натуральное число, все остальное — дело рук человеческих». В конце нашего § 11 мы имели случай видеть, как из натуральных чисел строятся числа рациональные.) Есть несколько способов, посредством которых действительные числа строятся при помощи натуральных. Один из них состоит в том, что, грубо говоря, действительное число — это бесконечная десятичная дробь. Слова «грубо говоря» означают, что сказанное нуждается в таком уточнении, после которого выражения, скажем $0{,}9999\ldots$ и $1{,}0000\ldots$ оказываются одним и тем же числом (хотя это и различные дроби). После чего на так введенных действительных числах определяются кольцевые операции и порядок. Тем самым множество действительных чисел становится линейно упорядоченным полем, а тот факт, что в этом поле любое сечение является дедекиндовым, *доказывается в качестве теоремы.* У читателя может возникнуть вопрос, где же в изложенном построении используются натуральные числа. Ответ: бесконечная десятичная дробь есть последовательность десятичных цифр — а, значит, такая ф у н к ц и я, которая каждому натуральному числу (номеру места) ставит в соответствие некоторую цифру от 0 до 9.

Но можно дать и совершенно другой ответ. Можно сказать себе: мы не знаем, что́ такое в точности представляют из себя действительные числа (если вдуматься, то так оно и есть!), а знаем только некоторые их свойства. Вот эти-то свойства мы и запишем в качестве системы аксиом. То есть мы поступаем так же, как при аксиоматическом построении геометрии. Там мы говорили себе так: мы не знаем, что́ такое точки, прямые и т. д., но знаем их свойства и отражаем их в аксиомах.

Что же это за свойства действительных чисел, которые следует отразить в аксиомах? Эти свойства таковы: действительные числа образуют линейно упорядоченное поле, в котором все сечения дедекиндовы. Следовательно, аксиоматика действительных чисел такова: система аксиом для действительных чисел состоит из всех аксиом линейно упорядоченного поля плюс следующая *аксиома Дедекинда.*

А к с и о м а Д е д е к и н д а. *Всякое сечение является дедекиндовым сечением.*

З а м е ч а н и е. Внимательный читатель заметит сходство между только что сформулированной аксиомой Дедекинда для действительных чисел и аксиомой Дедекинда для точек на прямой из § 9. В самом деле, и там, и там речь идет о взаимном расположении двух множеств (составленных из точек прямой в одном случае и составленных из действительных чисел в другом) и о существовании разделяющего их элемента (точки в одном случае, числа в другом). Можно переформулировать эти аксиомы так, чтобы их формулировки стали еще более похожими. И это неудивительно: ведь на хорошо известной читателю числовой прямой геометрическая точка отождествляется со своей координатой, то есть с действительным числом. Но сама возможность введения числовых координат на *геометрической* прямой, при котором эта прямая превращается в *числовую* прямую (так что каждой точке прямой отвечает ровно одно число, а каждому числу — ровно одна точка), сама эта возможность как раз и опирается на аксиомы, выражающие свойства как точек прямой, так и действительных чисел. А среди этих аксиом, обеспечивающих взаимно однозначное соответствие между точками прямой и действительными числами, немаловажная роль принадлежит обеим аксиомам Дедекинда (или, при желании, другим равносильным им аксиомам). Без названных или равносильных им аксиом построить подобное соответствие в полном объеме невозможно, а возможно лишь построить соответствие между рациональными числами и *некоторыми* из точек прямой (а именно, теми точками, координаты которых рациональны).

Таким образом, при аксиоматическом подходе поле действительных чисел о п р е д е л я е т с я как такое линейно упорядоченное поле, в котором выполняется аксиома Дедекинда. Иными словами, по определению, *поле действительных чисел есть модель выписанных выше четырнадцати аксиом* (а именно, трех аксиом строго линейного порядка, восьми аксиом поля, двух аксиом согласованности и аксиомы Дедекинда).

Итак, аксиоматическое определение поля действительных чисел дано, и, казалось бы, на этом вопрос закрыт. Но нет. Встают два новых, и притом очень принципиальных и естественных вопроса — вопрос о *существовании* и вопрос о *единственности* поля действительных чисел при аксиоматическом его определении.

Вопрос о существовании поля действительных чисел, иными словами, вопрос о совместности аксиоматики действительных чисел, кажется имеющим очевидный и утвердительный ответ. Да, такое поле существует, поскольку оно может быть построено. Об этом мы говорили несколькими строками выше. Однако построение происходит не из пустоты. Оно использует понятие натурального числа. Само же это понятие, при более пристальном и критическом анализе, требует своего собственного уточнения и определения. Мы кратко скажем об этом несколько слов ниже, в Заключительных Замечаниях § 15. Пока же подчеркнем, что непротиворечивость теории действительных чисел опирается на непротиворечивость теории натуральных чисел, доказать которую невозможно, а в которую можно только верить.

Теперь обратимся к вопросу о единственности. В § 11 была выписана аксиоматика, т. е. система аксиом, для понятия линейно упорядоченного множества. Но ведь у этой системы аксиом много совершенно различных моделей, поскольку бывает много совершенно различных линейно упорядоченных множеств. Точно также бывают не похожие друг на друга кольца — и все они будут моделями аксиоматики кольца. И линейно упорядоченные поля бывают очень разные. Так что же, у аксиом поля действительных чисел тоже бывают разные модели? Если это было бы так, то это бы значило, что бывают разные поля действительных чисел, и замысел охарактеризовать это поле аксиоматически можно было бы считать проваленным.

Сама постановка вопроса о том, сколько есть моделей у данной системы аксиом (и, тем самым, сколько есть полей действительных чисел) не так проста, как могло бы показаться на первый взгляд. Все дело в том, что́ считать одинаковым, а что́ разным. Вот в слове «сама» — первом слове этого абзаца — на 2-м и 4-м местах встречается одна и та же вещь, или там находятся разные вещи? Смешной вопрос, скажет читатель, конечно же, на обоих местах стоит одна и та же вещь, а именно буква «а». Но ведь если считать букву материальным объектом, отпечатанным типографской краской, то эти две буквы «а» будут различными вещами, состоящими из непересекающихся совокупностей частиц краски. Именно такой подход проявляется, скажем, во фразе: «эта буква «а» хорошо отпечаталась на бумаге, а эта вышла недостаточно отчетливо». Конечно, более часто уместен другой подход, при котором эти две буквы «а» считаются одной и той же вещью.

В математике принято не различать модели, имеющие одинаковое строение. Такие модели считаются *одной и той же* моделью. Разумеется, слова «имеющие одинаковое строение» нуждаются в серьезном уточнении. Математика в состоянии предложить такое уточнение в виде понятия **изоморфии** моделей. У нас нет возможности дать здесь строгие определения, поэтому ограничимся пояснениями.

Вспомним пример 2 из нашего § 13. Заменим всюду в этом примере большие латинские буквы на малые. Получим ли мы новый пример кольца или тот же самый? Это как посмотреть. Новый, скажет один: ведь раньше в кольце были элементы A, B, C, D, а теперь элементы a, b, c, d. Какая глупость, скажет другой, какая разница, как мы обозначили элементы; конечно же, кольцо будет тем же самым. Как мы понимаем, все зависит от точки зрения. В математике принята вторая точка зрения, при которой оба наши кольца не различаются. На интуитивном уровне у них совершенно одинаковое строение. На точном математическом уровне, после соответствующих определений, говорят, что эти кольца **изоморфны** или что имеет место **изоморфия** двух колец. Смысл явления изоморфии состоит в том, что все, что мы можем сказать об одном из этих колец, используя в нашей речи только кольцевые операции и общелогические понятия, будет верно и для другого кольца.

Вообще, две модели какой-либо аксиоматической системы изоморфны в том и только в том случае, если все, что можно сказать об одной модели, используя только исходные понятия данной аксиоматики и общелогические понятия, будет верно и для другой модели. При исследовании аксиоматических теорий *изоморфные модели принято не различать*. Еще раз повторим, что само понятие изоморфии, означающее одинаковость строения, допускает строгое математическое определение. Согласно этому определению, две модели изоморфны, если между ними можно установить такое особое соответствие, называемое **изоморфизмом**, при котором все отношения, соблюдающиеся для элементов одной модели, будут выполняться для соответствующих элементов другой модели. Сказанное, конечно, не вполне понятно. Но мы не можем здесь привести точного определения изоморфизма и потому ограничимся наглядным примером, использующим геометрию тетраэдра из нашего § 5.

В § 5 мы с помощью шишек, стержней и листов бумаги построили модель для первой группы аксиом геометрии. А если в этой модели заменить шишки на помидоры, стержни на соломины и листы бумаги на куски брезента — это будет та же самая модель или другая? Физически это, конечно, будет другая модель, но с точки зрения математики — та же самая. Потому мы и употребляли для нее термин «геометрия тетраэдра», что нас не заботило, из каких материалов собран этот самый тетраэдр. На точном математическом языке новая, помидорная модель будет *изоморфна* старой, шишечной. А изоморфия, как мы сказали в предыдущем абзаце, означает наличие *изоморфизма*, т. е. соответствия специального вида. Что это будет за соответствие в данном конкретном случае? В данном конкретном случае это будет взаимно однозначное соответствие между шишками и помидорами. Для наглядности можно протянуть нити от шишек к помидорам, так чтобы от каждой шишки и от каждого помидора отходила ровно одна нить. Причем это надо сделать так, что если две шишки соединены одним стержнем, то соответствующие им два помидора должны быть нанизаны на одну соломину. И если три шишки расположены на одном листе бумаги, то соответствующая им тройка помидоров должна находиться на одном куске брезента. Только что мы дали достаточно точное описание того соответствия между шишечной моделью и помидорной моделью, которое и называется изоморфизмом между этими моделями.

Вот теперь мы можем ответить на вопрос о том, сколько имеется полей действительных чисел. Ответ: *все модели аксиоматики поля действительных чисел изоморфны, и в этом смысле поле действительных чисел единственно.*

И в заключение параграфа — о единственности модели у аксиоматики геометрии. Все модели аксиоматики Гильберта изоморфны, и в этом точном смысле евклидова геометрии единственна. Если же мы удалим какую-нибудь аксиому, то у оставшейся системы аксиом уже будет много неизоморфных моделей.

§ 15. Аксиомы метрики и аксиомы меры

Знаете ли Вы, уважаемый читатель, что такое расстояние между двумя точками? Ну конечно же, знаете — это знают все: надо соединить эти точки отрезком и измерить его длину. Очень хорошо. Значит, когда говорят, что от Москвы до Владивостока столько-то километров, мысленно соединяют эти города отрезком прямой... Нет, тут что-то не так: ведь ввиду шарообразности Земли этот отрезок пройдет под землей. А расстояния между городами все-таки измеряются по поверхности Земли. Значит, расстояние между Москвой и Владивостоком надо мерить так: натянуть между этими двумя городами нитку по глобусу, измерить ее длину и затем умножить на масштаб. На более научном языке тот же способ излагается так: находим дугу большого круга, соединяющую Москву и Владивосток, и измеряем ее. (Для простоты изложения мы принимаем, что Земля — это в точности шар; именно тогда можно говорить о «больших кругах», то есть о тех окружностях на поверхности Земли, центр которых совпадает с центром Земли.) Допустим, что мы нашли расстояние между нашими городами именно таким способом (можно даже внести поправку на отклонение формы Земли от шара). Но если мы теперь откроем железнодорожный справочник, то мы увидим совсем другое расстояние — и это понятно, поскольку там расстояние указывается в километрах железнодорожного пути. А в справочнике автомобильных дорог — еще одно расстояние, в километрах автодорог.

Итак, мы обнаружили четыре разных расстояния между Москвой и Владивостоком. Которое же из них истинное? А ведь есть еще и другие способы измерения расстояния. Всем известно, что капитаны добрых старых времен измеряли путь по пучинам вод не иначе, как количеством выкуренных трубок. Вот более серьезный пример: представим себе неоднородное прозрачное вещество, внутри которого распространяется свет. Тогда расстояние между двумя точками уместно измерять временем прохождения света от одной точки до другой, и это время будет зависеть не только от геометрического расстояния между точками, но и от меняющихся на его пути оптических свойств среды.

Повторим вопрос: какой же из способов измерения расстояния приводит к истинному расстоянию? Ответ: все. Просто мы имеем дело с разными представлениями о расстоянии или, как говорят, с разными *метриками.*

Вот, скажем, в случае Москвы и Владивостока мы имели четыре разные метрики: 1) *евклидову метрику*, когда расстояние между двумя точками пространства измеряется длиной соединяющего их отрезка, пусть даже и протыкающего насквозь нашу планету; 2) *сферическую метрику*, когда расстояние между двумя точками измеряется по поверхности сферы; 3) *железнодорожную метрику*, когда расстояние между двумя точками измеряется длиною рельсового пути между ними; 4) *автомобильную метрику*, когда расстояние измеряется длиной автомобильного пути.

А давайте подумаем, можно ли расстояние между двумя точками туристского маршрута измерять временем перехода. Если мы так сделаем, то расстояние от точки A, лежащей под горой, до точки B, расположенной на горе, может оказаться больше, чем расстояние от B до A, что как-то нехорошо. (По той же причине нельзя мерить расстояние количеством затраченного топлива.) В наших предыдущих примерах такого неприятного эффекта не наблюдалось, и расстояние было симметричным. А вот между площадями Москвы измерять расстояние при помощи пробега автомобиля нельзя: такое расстояние оказалось бы несимметричным (ввиду наличия улиц с односторонним движением и вызванной этим необходимости объездов).

Можно попытаться выделить те свойства, которые присущи всем мыслимым способам измерения расстояния. Таких свойства оказалось три. Во-первых, расстояние от любого места до этого же самого места равно нулю, а расстояние между различными местами не может быть равно нулю. Во-вторых, расстояние от одного места до второго должно быть равно расстоянию от второго места до первого (свойство симметричности расстояния). В-третьих, мы не можем сократить расстояние от A до B, если по дороге зайдем в пункт C. Все эти свойства оформляются в виде так называемых *аксиом метрики.* А *метрикой* называется функция, относящая двум объектам расстояние между ними.

Точное определение таково. Функция ρ от двух переменных называется **метрикой на множестве** M, если она с каждой парой x, y элементов M сопоставляет неотрицательное действительное число $\rho(x,y)$, называемое *расстоянием* между x и y, причем выполняются следующие

Аксиомы метрики

1. Аксиома тождества:

$$\rho(x,y)=0 \text{ тогда и только тогда, когда } x=y.$$

2. Аксиома симметрии:

$$\rho(x,y)=\rho(y,x).$$

3. Аксиома треугольника:

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Произвольное множество, рассматриваемое вместе с определенной на нем метрикой, называется **метрическим пространством**. Множество точек на поверхности Земли с определенной на нем евклидовой метрикой — это метрическое пространство. То же множество, но со сферической метрикой — это другое метрическое пространство. Множество станций железнодорожной сети России, где расстояние определяется как кратчайший путь по рельсам — третье метрическое пространство.

Во всех этих примерах элементами метрического пространства были точки на поверхности Земли (если, конечно, согласиться считать железнодорожную станцию точкой). Упомянутое выше прозрачное вещество тоже есть метрическое пространство (с «оптической метрикой»), его элементами служат точки внутри этого вещества. А вот пример иного рода, здесь элементами метрического пространства уже служат не точки поверхности или геометрического пространства, а нечто совсем другое. Рассмотрим совокупность всех непрерывных функций, определенных на отрезке [0, 1]. Расстояние между функциями f и g определим так: $\rho(f,g)$ есть наибольшая из абсолютных величин разностей $f(x)-g(x)$, когда аргумент x пробегает отрезок [0, 1]. Мы получим метрическое пространство, играющее заметную роль в математике. Последний пример иллюстрирует тот факт, что элементами метрического пространства могут быть элементы любой природы. Рассматривают, например, метрическое пространство, элементами которого служат цвета.

Итак, мы познакомились с различными способами измерения расстояния; все они подчиняются аксиоматике метрики. Но бывают и совсем другие измерения. Так, размер комнаты обычно измеряют площадью ее пола. Однако если нужно клеить обои, то важнее другое измерение — площадь стен. Немаловажное значение имеет и объем комнаты. Когда перемещают товар, то иногда его меряют по весу (столько-то тонн угля), иногда по объему (столько-то кубометров газа), а в иных случаях — скажем, при таможенных расчетах — иногда и по стоимости (на такую-то сумму денег). А сельскохозяйственные угодья можно измерять количеством снимаемого урожая. Все эти способы подчиняются ***аксиомам меры.***

Представим себе, что у нас есть нечто, что может делиться на части. Это может быть проволока, или жилой фонд, или какой-то товар, или лесной массив. Далее, каждой части мы относим некоторое число, называемое *мерой* этой части. Например, в случае проволоки мерой части, т. е. куска проволоки, может служить ее длина или вес — но мы должны остановиться на одном из этих вариантов. В случае жилого фонда часть состоит из какого-то количества комнат или квартир, а мерой может служить или, как обычно, площадь, или, скажем, объем (что́ на практике, кажется, не встречается). В случае товара мерой части может служить или ее вес, или объем, или цена — но, конечно, мы должны выбрать что-нибудь одно. В случае леса частями являются его участки, а мерой может служить количество кубометров вырубленной на нем древесины — или, что более приятно в экологическом отношении, цена, вырученная за собранные на этом участке шишки.

Во всех этих случаях мера каждой части есть неотрицательное действительное число. Очевидны основные свойства меры. Ну, например, мера пустой части должна быть равна нулю. Но это не главное свойство меры. Главное свойство меры состоит в ее *аддитивности.* Это значит, что при сложении частей меры должны тоже складываться; разумеется, слагаемые части должны при этом не перекрываться. Достаточно потребовать, чтобы это правило действовало для сложения двух частей, т. е. чтобы выполнялось следующее: если д в е неперекрывающиеся части соединяются в одну, то мера образовавшейся суммарной части должна быть равна сумме мер тех двух частей, из которых эта суммарная часть составлена. А тогда это свойство аддитивности будет автоматически распространяться на сложение любого конечного числа частей. Действительно, меру части, полученной слиянием частей A, B и C можно вычислить так: сперва объединить A и B, мера объединенной части будет равна сумме мер частей A и B; а затем к этой объединенной части присоединить C; в результате окажется, что результирующая мера равна сумме мер всех т р е х частей. И так — для сложения любого конечного числа частей. Поэтому изложенный вариант свойства аддитивности называется свойством *конечной аддитивности.*

Однако для развития теории меры свойство конечной аддитивности часто оказывается недостаточным, а востребованным оказывается его обобщение на случай бесконечного числа слагаемых. Чтобы мы имели дело с полноценной мерой, нужно чтобы выполнялось следующее правило *счетной аддитивности*: если A_1, A_2, $A_3, \ldots$, $A_n, \ldots$ есть последовательность неперекрывающихся частей и мы соединили их всех в новую часть, то мера этой образовавшейся суммарной части равна сумме ряда, составленного из мер всех отдельных членов нашей последовательности. Заметим, что свойство конечной аддитивности вытекает из свойства счетной аддитивности. Это обосновывается следующим простым рассуждением. Сумма двух частей A и B равна сумме членов бесконечной последовательности, у которой первые два члена совпадают соответственно с A и B, а остальные члены совпадают с пустой частью. Составленный из мер числовой ряд будет выглядеть так: мера части A плюс мера части B плюс нули, нули, нули... Сумма этого ряда как раз и будет равна сумме частей A и B.

Мы уже почти готовы дать точное определение меры. Чтобы перейти на математический уровень, вместо слова «часть» будем говорить слово «подмножество». Когда говорят о подмножествах, всегда имеют в виду некоторое универсальное множество, чьими частями и являются рассматриваемые подмножества. В случае проволоки таким множеством будет множество ее точек; это если игнорировать ее толщину. (А если не игнорировать — множество линейных координат поперечных срезов; линейная координата — это расстояние от начала проволоки до среза.) Всякий кусок проволоки можно рассматривать как подмножество такого множества. В случае жилого фонда универсальным множеством будет множество всех точек пространства, принадлежащих включенным в этот фонд комнатам и квартирам. В случае товара универсальным множеством служит множество всех единиц, из которых состоит товар. Например, в случае мебели — это предметы мебели, а в случае угля или газа — материальные точки, т. е. мельчайшие частицы, из которых состоит топливо. В случае лесного массива универсальным множеством можно считать множество принадлежащих этому массиву деревьев.

Перед окончательным определением — еще два примера.

Представим себе пространство, заполненное материальными телами, имеющими массу; тогда, очевидно, имеет смысл говорить о суммарной массе, заключенной в данном объеме пространства, — а более общо, в данном множестве точек пространства. Мы получаем функцию, относящую некоторым множествам точек пространства их (множеств) массу. Эта функция является мерой. Универсальное множество здесь — множество всех точек пространства.

Другой пример — с тем же универсальным множеством. Отнесем данному объему пространства вероятность того, что интересующее нас событие происходит именно в пределах этого объема. Более общо, припишем некоторым множествам вероятность того, что событие происходит в одной из точек этого множества. Функция, относящая множеству соответствующую вероятность, является мерой. Этот простой пример позволяет понять, почему вся современная теория вероятностей (следуя высказанному в начале 30-х годов предложению великого математика Колмогорова) имеет своим фундаментом теорию меры.

Мера есть функция, аргументами которых служат подмножества универсального множества. Не предполагается, что мера есть у всякого подмножества; те подмножества, у которых она есть, называются *измеримыми.* Скажем, в случае товара, при измерении его по стоимости, не всякое собрание единиц этого товара можно считать товаром, имеющим стоимость. Даже газ должен поступать достаточно компактными объемами; если мы, скажем, мысленно отберем в рассматриваемую часть каждую десятую молекулу газа, то полученное подмножество молекул будет слишком разреженным, чтобы признать его частью того самого газа – не в физическом, а в потребительском смысле.

Переходим к точным определениям. Пусть дано какое-то множество W — *универсальное множество*, или *носитель меры.* В нем выделены некоторые подмножества, называемые *измеримыми множествами.* **Мерой** на W называется функция, которая ставит в соответствие каждому измеримому множеству некоторое неотрицательное действительное число (называемое мерой этого множества) и для которой выполняется следующая аксиома счетной аддитивности.

А к с и о м а с ч е т н о й а д д и т и в н о с т и. *Мера объединения счетного числа попарно непересекающихся множеств равна сумме их мер.* То же самое с помощью формул: *Пусть* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ *есть последовательность непересекающихся измеримых подмножеств. Тогда*

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n) + \ldots$$

К о м м е н т а р и й. Для простоты мы чуть-чуть сузили понятие меры. Дело в том, что в общем случае функции μ разрешается принимать и значение $+\infty$ (плюс бесконечность), но это было бы слишком сложно объяснять.

К сожалению, аксиоматика меры не исчерпывается аксиомой счетной аддитивности. Требуется еще наложить некоторые ограничения на совокупность измеримых подмножеств. Эти ограничения оформляются в виде следующих аксиом измеримости.

Аксиомы измеримости

1. *Универсальное множество измеримо.*

2. *Если подмножества X и Y измеримы, то их разность $X \setminus Y$ также измерима.*

3. *Объединение счетного числа измеримых множеств измеримо.* В обозначениях: *Пусть все члены последовательности A_1, A_2, $A_3, \ldots$, $A_n, \ldots$ являются измеримыми множествами; тогда их объединение $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ также является измеримым.*

Аксиоматика меры состоит из аксиом измеримости и аксиомы счетной аддитивности. В этой аксиоматике исходных, неопределяемых понятия два — **измеримое множество** и **мера**. Как всегда в аксиоматическом методе, мы объявляем, что мы не знаем, что это такое конкретно (т. е. какие именно множества измеримы и какая именно функция является мерой), но знаем некоторые свойства названных понятий, наличие которых и провозглашаем в аксиомах.

Чтобы понять, как работают эти аксиомы, давайте докажем несколько начальных теорем теории меры.

Теорема 21. Пустое множество $\varnothing$ измеримо и имеет меру 0.

Доказательство. Замечаем, что $\varnothing = W \setminus W$. Универсальное множество W измеримо по аксиоме 1; тогда $\varnothing$ измеримо по аксиоме 2. Раз пустое множество измеримо, то значение на нем (как на аргументе) функции μ определено. Пусть $\mu(\varnothing) = a$. Положим $A_n = \varnothing$ при всяком n. Тогда $\varnothing = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$, и мы можем применить аксиому счетной аддитивности (поскольку пустое множество не пересекается, т. е. не имеет общих точек, с самим собой!). По этой аксиоме $a = a + {} + a + \ldots + a + \ldots$. Но это возможно, лишь если $a = 0$.

Теорема 22. Объединение конечного числа измеримых множеств измеримо.

Доказательство.
$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup A_{n+3} \cup \ldots$, где все члены A_i, начиная с номера $i = n + 1$, равны пустому множеству. Заметив это равенство, используем сперва теорему 21, а затем аксиому 3.

Теорема 23. Пересечение конечного числа измеримых множеств измеримо.

Доказательство.
Всегда $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = W \setminus ((W \setminus A_1) \cup (W \setminus A_2) \cup \ldots \cup (W \setminus A_n))$. Это равенство легко проверяется. А затем применяем аксиому 2 и теорему 22.

Теорема 24. Мера обладает свойством конечной аддитивности, т.е. $\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \mu(\cup A_2) + \ldots + \mu(\cup A_n)$.

Доказательство.
$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing \ldots$, и мы можем применить аксиому счетной аддитивности.

В аксиоматиках метрики и меры участвовали, помимо исходных (неопределяемых) понятий этих аксиоматик, также и понятие действительного числа. Как мы видели в § 14, возможны два подхода к введению в рассмотрение действительных чисел. При одном подходе мы их строим (используя в качестве строительного материала натуральные числа), при другом — определяем аксиоматически. Если мы выбираем второй подход, то в систему аксиом как метрики, так и меры должны быть включены и аксиомы действительных чисел.

Заключительные Замечания

Во всех рассмотренных нами системах аксиом свободно употреблялись понятия множества, функции и натурального числа. Иногда эти понятия были упрятаны внутрь других. Так, неоднократно использовавшееся понятие последовательности содержит внутри себя понятия натурального числа и функции: ведь последовательность — это не что иное, как функция, определенная на натуральном ряду. Мы не включали понятия множества, функции и натурального числа в наши списки исходных, неопределяемых понятий на том основании, что относили их к тому языку, на котором мы разговариваем. Точнее сказать — к логике этого языка. Однако пользование логикой — а лучше сказать тем, что мы считаем логикой, — языка без каких-либо ограничений приводит к парадоксам. Удивляться этому особенно не приходится, потому что ведь логика языка возникла и развивалась, исходя, прежде всего, из бытовой практики, а потом уже стала, не вполне законно, применяться к сложным математическим образованиям.

Мы оказали бы дурную услугу читателю, призвав его усомниться в существовании натуральных чисел. Но все же полезно задуматься над тем, что́ значит, что существует какое-нибудь очень большое число — например, число, превосходящее количество элементарных частиц в видимой Вселенной. А существование натурального ряда — т. е. совокупности всех натуральных чисел — вызывает еще больше непростых философских вопросов.

Можно потребовать, чтобы и такие фундаментальные понятия математики, как понятия множества и натурального числа, определялись аксиоматически. Однако задача аксиоматического определения фундаментальных понятий таит в себе ловушки и опасности. Это уже совершенно другая и более сложная тема, относящаяся к компетенции математической логики.

Владимир Андреевич УСПЕНСКИЙ

Что такое аксиоматический метод?

Авторская редакция
Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерная подготовка М. А. Килин
Корректор М. А. Ложкина

Подписано в печать 03.08.01. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 5,58. Уч. изд. л. 5,62.
Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern Roman.
Бумага газетная. Тираж 1000 экз. Заказ № 36/т.

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика».
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ № 084 от 03.04.00.
http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ФГУП «Полиграф-ресурсы».
101429, г. Москва, ул. Петровка, 26.